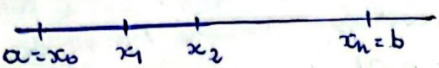
Analyse II : Calcul intégral et équations différentielles.

Chapitre I : Intégrale de Riemann

I- Subdivision de $[a,b]$

On appelle subdivision, $a<b$ un segment de $\mathbb{R}$; une suite finie $\sigma=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ de points de $[a,b]$ telle que :

$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$



Exples: Soit $[0,b]$, $b>0$ une subdivision de $[0,b]$ est

$\sigma=(x_i=\frac{bi}{n},\ i=\overline{0,n})=(0,\frac{b}{n},\frac{2b}{n},\dots,b)$

En particulier, une subdivision de $[0,1]$ est $\sigma=(x_i=\frac{i}{n},\ i=\overline{0,n})$

$=(0,\frac{1}{n},\dots,1)$

Notation:

On note $\Sigma[a,b]$ l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$.

Posons

$$T=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$$

* On dit que σ' est plus fine que σ si $T'\supset T$

(c-à-d que T' contient plus d'éléments que T).

Posons $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $i=\overline{0,n-1}$

* Le nombre $d(\sigma)=\max \Delta x_i$ est appelé $0\le i\le n-1$

"pas" de la subdivision σ.

* Soit σ' une subdivision associée à T'

σ'' une subdivision associée à T''

alors la reunion de σ' et σ'' est subdivision σ associée à $T'\cup T''$ on a σ est plus fine que σ' et σ''.

II- Sommes de Darboux

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée et $\sigma=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ une subdivision de $[a,b]$. Sur chaque $\Delta_i=[x_i,x_{i+1}]$, $i=\overline{0,n-1}$ f est bornée.

Posons

$$M_i=\sup_{x\in\Delta_i} f(x) \quad \text{et} \quad m_i=\inf_{x\in\Delta_i} f(x)$$

Definition

* La somme $S(f,\sigma)=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i$ est appelée somme inférieure de Darboux relative à f et σ.

Scanned with CamScanner

- La somme $S(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$ est appelé somme supérieure de Darboux relative à f et σ.

Proposition 1: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

Posons $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$.

Alors $\forall \sigma \in \Sigma[a,b]$, on a

$$m(b-a) \leq s(f,\sigma) \leq S(f,\sigma) \leq M(b-a)$$

Corollaire

Les ensembles $\{ s(f,\sigma), \sigma \in \Sigma[a,b] \}$ et $\{ S(f,\sigma), \sigma \in \Sigma[a,b] \}$ sont bornés.

Proposition 2:

Si σ' est plus fine que σ, alors on a

$$s(f,\sigma) \leq s(f,\sigma') \leq S(f,\sigma') \leq S(f,\sigma)$$

Démonstration

Soit σ' a un point de plus que σ

$\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$

$\sigma' : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x' < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$

$x' \in]x_i, x_{i+1}[$

Posons $\Delta_i' =]x_i, x'[$ et $\Delta_i'' =]x', x_{i+1}[$

$m_i' = \inf_{x \in \Delta_i'} f(x)$, $m_i'' = \inf_{x \in \Delta_i''} f(x)$

$\Delta_{x_i}' = x' - x_i = \lambda_1$

$\Delta_{x_i}'' = x_{i+1} - x' = \lambda_2$

$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$

Il est clair que $m_i' \geq m_i$ et $m_i'' \geq m_i$

On a

$$s(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = m_0 \Delta x_0 + m_1 \Delta x_1 + \cdots + m_{i-1} \Delta x_{i-1} + m_i \Delta x_i + m_{i+1} \Delta x_{i+1} + \cdots + m_{n-1} \Delta x_{n-1}.$$

$$s(f,\sigma') = m_0 \Delta x_0 + m_1 \Delta x_1 + \cdots + m_{i-1} \Delta x_{i-1} + m_i' \lambda_1 + m_i'' \lambda_2 + m_{i+1} \Delta x_{i+1} + \cdots + m_{n-1} \Delta x_{n-1}$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow s(f,\sigma') - s(f,\sigma) = m_i' \lambda_1 + m_i'' \lambda_2 - m_i \Delta x_i$$
$$= m_i' \lambda_1 + m_i'' \lambda_2 - m_i (\lambda_1 + \lambda_2)$$
$$s(f,\sigma') - s(f,\sigma) = (m_i' - m_i)\lambda_1 + (m_i'' - m_i)\lambda_2 \geq 0$$

$$\Rightarrow s(f,\sigma) \leq s(f,\sigma')$$

De façon analogique on demontre que $S(f,\sigma') \leq S(f,\sigma)$.

En utilisant la proposition 1, on a

$$s(f,\sigma) \leq s(f,\sigma') \leq S(f,\sigma') \leq S(f,\sigma)$$

Proposition 3

Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$

Alors $\forall \sigma', \sigma'' \in \Sigma[a,b]$, on a

$$s(f,\sigma) \leq S(f,\sigma'')$$

Démonstration

Soit σ la reunion de σ' et σ'', alors σ est plus fine que σ' et σ''.

D'après la proposition 2, on a:

$s(f,\sigma') \leq s(f,\sigma) \leq S(f,\sigma) \leq S(f,\sigma')$ et

$s(f,\sigma'') \leq s(f,\sigma) \leq S(f,\sigma) \leq S(f,\sigma'')$

En reunissant ces inégalités, on obtient:

$$s(f,\sigma') \leq s(f,\sigma) \leq S(f,\sigma) \leq S(f,\sigma'')$$
$$\Rightarrow s(f,\sigma') \leq S(f,\sigma'')$$

Corollaire

Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$.

Posons

$$I^-(f) = \sup \{ s(f,\sigma), \sigma \in \Sigma[a,b] \}$$
$$I^+(f) = \inf \{ S(f,\sigma), \sigma \in \Sigma[a,b] \}$$

Alors

$$I^-(f) \leq I^+(f)$$

Démonstration

Soit $\sigma_0 \in \Sigma([a,b])$, alors d'après la proposition 3;

Scanned with CamScanner

$\forall \sigma \in \Sigma([a,b])$ on a $s(f,\sigma) \leq S(f,\sigma_0)$

$\Rightarrow S(f,\sigma_0)$ est un majorant de l'ensemble

$\{ s(f,\sigma), \sigma \in \Sigma([a,b]) \}$ et, comme $I^-(f)$ est la borne supérieure de cet ensemble on a $I^-(f) \leq S(f,\sigma_0), \forall \sigma_0 \in \Sigma([a,b])$

et par suite $I^-(f)$ est minorant de l'ensemble

$\{ S(f,\sigma_0) ; \sigma_0 \in \Sigma[a,b] \}$ et comme $I^+(f)$ est la borne inférieure, on a : $I^-(f) \leq I^+(f)$.

III. Fonction intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Définition

Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$. On dit que f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ (ou intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$) si $I^-(f) = I^+(f)$.

Notation

On note $\mathcal{R}[a,b]$ l'ensemble des fonctions Riemann intégrables sur $[a,b]$ si $f \in \mathcal{R}[a,b]$, c-à-d f est Riemann intégrable sur $[a,b]$, on pose

$$\int_a^b f(x)\,dx = I^-(f) = I^+(f) = I$$

Théorème :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors

$f \in \mathcal{R}([a,b]) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \sigma \in \Sigma[a,b]$ telle que

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon .$$

Démonstration

$\Rightarrow$) Soit $f \in \mathcal{R}[a,b]$; $I^-(f) = I^+(f) = I$

D'après la définition de la borne sup et inf, on a

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \sigma', I^-(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\sigma') \leq I^-(f)$

$\exists \sigma'', I^+(f) \leq S(f,\sigma'') < I^+(f) + \frac{\varepsilon}{2}$

Soit σ la réunion de σ' et σ''

(σ est plus fine que σ' et σ'') alors

Scanned with CamScanner

$I^-(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\sigma') \leq s(f,\sigma) \leq I^-(f)$

$= I^+(f) \leq S(f,\sigma'') \leq I^+(f) + \frac{\varepsilon}{2}$

On a : $S(f,\sigma) \leq S(f,\sigma'')$ et $s(f,\sigma) \geq s(f,\sigma')$

$\Rightarrow 0 \leq S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \leq S(f,\sigma'') - s(f,\sigma') < I^+(f) + \frac{\varepsilon}{2} - (I^-(f) - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$

$\Rightarrow S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon$

$\Leftarrow$) Soit $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \sigma \in \Sigma[a,b]$ tel que $S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon$

On a : $s(f,\sigma) \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq S(f,\sigma)$

$\Leftarrow s(f,\sigma) \leq I^-(f)$

$I^+(f) \leq S(f,\sigma)$

$\Leftarrow s(f,\sigma) + I^+(f) \leq I^-(f) + S(f,\sigma)$

$\Leftarrow s(f,\sigma) + I^+(f) - s(f,\sigma) - I^-(f) \leq I^-(f) + S(f,\sigma) - s(f,\sigma) - I^-(f)$

$\Leftarrow 0 \leq I^-(f) - I^-(f) \leq S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon$

$\Leftarrow 0 \leq I^+(f) - I^-(f) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Leftarrow I^+(f) - I^-(f) = 0$

$\Leftarrow I^-(f) = I^+(f)$

IV/ - Exemples des fonctions Riemann intégrables.

1) Théorème 1

Toute fonction monotone sur $[a,b]$ est Riemann intégrables sur $[a,b]$.

2) Théorème 2

Toute fonction continue sur $[a,b]$ est Riemann intégrables sur $[a,b]$.

Démonstration

f est continue sur $[a,b] \Rightarrow f$ est uniformement continue sur $[a,b]$.

Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists \eta > 0$,

Scanned with CamScanner

$\forall x', x'' \in [a,b]$.

$|x'-x''| < \eta \Rightarrow |f(x')-f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

Soit $\sigma \in \Sigma[a,b]$ telle que $\phi(\sigma) < \eta$ et $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$.

Sur $[x_i, x_{i+1}]$, $m_i = \inf f(x)$ est une valeur prise, c-à-d $\exists y_i$, $m_i = f(y_i)$.

$M_i = \sup f(x)$ est une valeur prise, c-à-d $\exists z_i$, $M_i = f(z_i)$

et $0 \le M_i - m_i = f(z_i) - f(y_i) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$

Alors

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1})$$

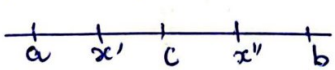
$$= \frac{\varepsilon}{b-a}(x_n - x_0) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

$\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]$.

3) Soit f une fonction nulle sur $[a,b]$ sauf en un point, alors $f \in \mathcal{R}[a,b]$ et $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Démonstration

Supposons $f(c) \neq 0$; $c \in]a,b[$



Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$.

$m_i = \inf_{x \in \delta i} f(x)$, $M_i = \sup_{x \in \delta i} f(x)$

$\Delta i = [x_i, x_{i+1}]$, $d(\sigma) = \max_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$

* On a $0 = m_i = M_i$ si $c \notin [x_i, x_{i+1}]$
* sur $[x', c]$ et $[c, x'']$, $M_i = f(c)$,

$m_i = 0$

Scanned with CamScanner

D'où $S(f,\sigma) - s(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$

$= f(c)(c - x') + f(c)(x'' - c) \leq 2f(c)\, d(\sigma) < \varepsilon$

$\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]$ et $I^-(f) = I^+(f) = \int_a^b f(x)\,dx$

$\Vert$ car $\forall \sigma, s(f,\sigma) = 0$.

4) Soit $f(x) = K$ sur $[a,b]$

Alors $\int_a^b f(x)\,dx = K(b-a)$

5) Relation de Chasles

Théorème

Soit $a < b < c$, si f est intégrable sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$, alors elle est intégrable sur $[a,c]$ et on a :

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Inversement, si f est intégrable sur $[a,c]$, elle est intégrable sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$.

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$

$f \in \mathcal{R}([a,b]) \Rightarrow \exists\, \sigma_1 \in \Sigma[a,b]$ telle que

$$S(f,\sigma_1) - s(f,\sigma_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$f \in \mathcal{R}([b,c])$, $\exists\, \sigma_2 \in \Sigma[a,b]$ telle que

$$S(f,\sigma_2) - s(f,\sigma_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit σ la subdivision obtenue en mettant σ_1 et σ_2 bout à bout.

On a

$S(f,\sigma) = S(f,\sigma_1) + S(f,\sigma_2)$

$s(f,\sigma) = s(f,\sigma_1) + s(f,\sigma_2)$

D'où

$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) = S(f,\sigma_1) - s(f,\sigma_1) +$

Scanned with CamScanner

$+ S(f,\sigma_2) - s(f,\sigma_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]$.

On a

$\Delta(f,\sigma) \leq \int_a^c f(x)dx \leq S(f,\sigma)$ ①

$\left.\begin{array}{l} \Delta(f,\sigma_1) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S(f,\sigma_1) \\ \Delta(f,\sigma_2) \leq \int_b^c f(x)dx \leq S(f,\sigma_2) \end{array}\right|$

$\Delta(f,\sigma) \leq \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \leq S(f,\sigma)$ ②

② − ① $\Rightarrow -(S(f,\sigma) - s(f,\sigma)) \leq \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx - \int_a^c f(x)dx \leq$

$\leq S(f,\sigma) - s(f,\sigma)$

$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx - \int_a^c f(x)dx \right| \leq S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$.

$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx - \int_a^c f(x)dx \right| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx - \int_a^c f(x)dx = 0$

$\Rightarrow \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Montrons maintenant que si f est intégrable sur $[a,c]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$, $a < b < c$.

$f \in \mathcal{R}[a,c] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \sigma \in \Sigma[a,b]$ telle que $S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon$

Ajoutons b à la subdivision σ et on note σ' la subdivision obtenue :

$\sigma' = (x_0, x_1, \dots, x_i, b, x_{i+1}, \dots, x_n = c)$.

On a σ' est plus fine que σ et on a $S(f,\sigma') - s(f,\sigma') \leq$

$\leq S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon$

Alors en prenant $\sigma_1 = (x_0, x_1, \dots, x_n, b) \in \Sigma[a,b]$

$S(f,\sigma_1) - s(f,\sigma_1) < \varepsilon$

$\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]$.

6- Convention :

Si $a > b$, alors $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ et $\int_a^a f(x)dx = 0$

Scanned with CamScanner

Alors la relation de charles fonctionne ∀ l'ordre de a, b et c.

I - Opérations sur les fonctions Riemann intégrables

1 - Opérations linéaires

Si $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, alors

- $f+g \in \mathcal{R}[a,b]$ et $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in \mathcal{R}[a,b]$ et $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

Corollaire : Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ et si m est modifié la valeur de f en nombre fini de points, alors la fonction obtenue g est Riemann intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$

Démonstration :

$f-g$ est nulle sauf en un nombre fini de points, donc

$f-g \in \mathcal{R}[a,b]$ et $\int_a^b (f-g)(x)\,dx = 0$,

$g = (f-(f-g)) \in \mathcal{R}[a,b]$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.

2 - Croissance

Théorème : Soit $a < b$.

Si $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ et $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Démonstration :

Comme $f \leq g$ sur $[a,b]$, alors $\forall \sigma \in \Sigma[a,b]$, on a

$s(f,\sigma) \leq s(g,\sigma) \leq \mathcal{I}^-(g) = \int_a^b g(x)\,dx$

$\mathcal{I}^-(g) = \sup\{s(g,\sigma),\ \sigma \in \Sigma[a,b]\}$

$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ est un majorant de l'ensemble $\{s(f,\sigma),\ \sigma \in \Sigma[a,b]\}$ et comme $\mathcal{I}^-(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ est le plus petit des majorants, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Corollaire 1 : Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ et $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ alors,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Scanned with CamScanner

Corollaire 2: (Valeur absolue).

Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ alors $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ et $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Démonstration: Montrons que $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}[a,b]$

Posons $M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$, $m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$

$M_i' = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} |f(x)|$, $m_i' = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} |f(x)|$

Il est clair que

$M_i' - m_i' \leq M_i - m_i$

Donc

$S(|f|, \sigma) - s(|f|, \sigma) \leq S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \varepsilon$

$\Rightarrow |f| \in \mathcal{R}[a,b]$.

D'autre part, $\forall x \in [a,b]$, on a

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

$\Rightarrow -\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$

$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

4 - Produit.

Théorème: Si $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, alors $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$

5- Inégalités de Cauchy - Schwartz et de Minkovskii

Si $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, alors

• Inégalité de Cauchy - Schwartz

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx$$

• Inégalité de Minkovski

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b (g(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

Démonstration (l'inégalité de C-S)

On a:

$$\int_a^b \left((\lambda f + g)(x) \right)^2 dx \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow \lambda^2 \int_a^b (f(x))^2 dx + 2\lambda \int_a^b f(x) g(x) dx + \int_a^b (g(x))^2 dx \geq 0$

$\Rightarrow \Delta' = \left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 - \int_a^b (f(x))^2 dx \int_a^b (g(x))^2 dx \geq 0$

Remarque : L'inégalité ϵ-s $\Rightarrow$ l'inégalité de Minkowskii

VI - Formule de la moyenne

1- Théorème et définition

Définition : si $f \in \mathcal{R}[a,b]$, la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est le nombre $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Théorème : Posons $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$

alors : $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$

Démonstration

On a $m \leq f \leq M$

$\Rightarrow \int_a^b m\, dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$

$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

2) Cas particulier d'une fonction continue : Formule de la moyenne.

Théorème : Si f est continue sur $[a,b]$, alors

$\exists\, c \in [a,b]$ tel que

$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$; (la valeur moyenne est une valeur prise)

Démonstration : Toute valeur comprise entre m et M est une valeur prise.

VII - Etude de la fonction $x \to \int_a^x f(t) dt$

$f \in \mathcal{R}[a,b]$, $x \in [a,b]$.

1) Cas si f est seulement intégrable.

Alors la fonction $x \to \int_a^x f(t) dt$ est continue et est même Lipschitzienne, (ϵ-δ-d)

$\forall x, x' \in [a,b]$, $|f(x) - f(x')| \leq k |x - x'|$).

Scanned with CamScanner

Démonstration : Posons $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

On a $g(x) - g(x') = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x'} f(t)\,dt = \int_{x'}^x f(t)\,dt$

où f est bornée, $(c-à-d)$ $|f(x)| \leq k$.

D'où $|g(x) - g(x')| = \left|\int_{x'}^x f(t)\,dt\right| \leq \int_{x'}^x |f(t)|\,dt \leq k|x-x'|$

2) Cas où f est continue

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

Posons $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$; $x \in I$.

Alors la fonction g est dérivable sur I et on a :

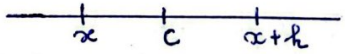
$$g'(x) = f(x).$$

Démonstration :

On a :

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c) \text{ avec } c \text{ compris entre } x \text{ et } x+h.$$



Quand $h \to 0$; $f(c) \to f(x)$ et

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x) \quad (c'-à-d) \quad g'(x) = f(x)$$

Autre formulation du théorème.

Toute fonction f continue sur un intervalle ouvert I, possède des primitives sur I, $(c-à-d)$ des fonctions g telles que

$$g' = f.$$

Si $a \in I$, la fonction $x \to \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f prenant la valeur 0 pour $x = a$.

3) **Remarque :** Si f est continue, μ dérivable et $g(x) = \int_a^{\mu(x)} f(t)\,dt$, alors :

Scanned with CamScanner

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)\,dt = u'(x) f(u(x))$$

(c'est à dire) $g'(x) = u'(x) f(u(x))$

En général, si $g(x) = \int_{a(x)}^{u(x)} f(t)\,dt$,

avec $u, a \in C^1(\mathbb{R})$ et $f \in C(\mathbb{R})$; on a

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\int_0^{a(x)} f(t)\,dt + \int_0^{u(x)} f(t)\,dt\right)$$

$$= -a'(x) f(a(x)) + u'(x) f(u(x))$$

$$\Rightarrow g'(x) = u'(x) f(u(x)) - a'(x) f(a(x))$$

Exple: • Soit $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt$, $x > 0$

On a: $f'(x) = (\sqrt{x})' \cos(\sqrt{x})^2 - \left(\frac{1}{x}\right)' \cos\left(\frac{1}{x}\right)^2$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x + \frac{1}{x^2} \cos\frac{1}{x^2}$$

• Soit $\int_0^y e^t\,dt + \int_0^x \sin t\,dt = 0$

Calculer $\frac{dy}{dx}$

En dérivant l'équation, on obtient $y' e^y + \sin x = 0$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -e^{-y} \sin x.$$

Remarque: Si $F(x)$ est la primitive de f sur $[a,b]$, alors ceci n'implique pas toujours que f est intégrable sur $[a,b]$.

Exple: La fonction:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x^2} & ; x \neq 0 \end{cases}$$

est la primitive sur $[-1,1]$ de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & , x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Car $F'(x) = 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

Scanned with CamScanner

et $F'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(0+h)-F(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} h^2 \sin\frac{1}{h^2}$

$= \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h^2} = 0$; $\left(0 \le \left|h \sin\frac{1}{h^2}\right| \le h \to 0\right)$

Mais f n'est pas bornée sur $[-1,1]$, d'où f n'est pas intégrable sur $[-1,1]$.

VIII.1 – Formule de Newton-Leibniz

Théorème : Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, $a<b$ et possède une primitive F sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Démonstration :

F primitive de f $\Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \Sigma[a,b]$.

On a :

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = \int_a^{x_{i+1}} f(t)\,dt - \int_a^{x_i} f(t)\,dt$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt = (x_{i+1}-x_i)\cdot \frac{1}{(x_{i+1}-x_i)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt$$

$\Rightarrow F(x_{i+1}) - F(x_i) = (x_{i+1}-x_i) f(c_i)$

avec $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$

$M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$; $m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$

où $\forall i = \overline{0, n-1}$,

$$m_i (x_{i+1}-x_i) \le F(x_{i+1}) - F(x_i) \le M_i (x_{i+1}-x_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1}-x_i) \le \sum_{i=0}^{n-1} \left(F(x_{i+1}) - F(x_i)\right) \le \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1}-x_i)$$

$$\Leftrightarrow s(f,\sigma) \le F(b) - F(a) \le S(f,\sigma) \quad \forall \sigma \quad (*)$$

or $f \in \mathcal{R}[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma \in \Sigma[a,b]$

$\cdot S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon$

Scanned with CamScanner

Pour le même σ, on a:

$$s(f,\sigma) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S(f,\sigma) \quad (2)$$

(2) - (1) donne

$$s(f,\sigma) - S(f,\sigma) \leq \int_a^b f(x)dx - \left(F(b)-F(a)\right) \leq S(f,\sigma) - s(f,\sigma)$$

$$\Rightarrow -\left(S(f,\sigma)-s(f,\sigma)\right) \leq \int_a^b f(x)dx - \left(F(b)-F(a)\right) \leq S(f,\sigma) - s(f,\sigma)$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)dx - \left(F(b)-F(a)\right| \leq S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \varepsilon$$

c'-à-d $\left| \int_a^b f(x)dx - \left(F(b)-F(a)\right| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx - \left(F(b)-F(a)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Remarque:

* On a $F'(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} \Rightarrow dF(x) = F'(x)dx$

* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b dF(x) = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$

Exples:

1) $$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}\int_a^b (n+1)x^n dx = \frac{1}{n+1}\int_a^b (x^{n+1})' dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}\int_a^b dx^{n+1}, \quad n \neq -1.$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_a^b = \frac{1}{n+1}\left[b^{n+1}-a^{n+1}\right]$$

2) $$\int_a^b \sin x\,dx = -\int_a^b (-\sin x)dx = -\int_a^b (\cos x)' dx$$

$$= -\int_a^b d\cos x \Rightarrow \int_a^b \sin x\,dx = -\cos x\Big|_a^b$$

$$= \cos a - \cos b.$$

3) $$\int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^a (\operatorname{arctg} x)' dx = \int_0^a d\operatorname{arctg} x$$

$$= \operatorname{arctg} x\Big|_0^a = \operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg} a$$

Scanned with CamScanner

4) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \int_1^2 (\ln x)' dx = \int_1^2 d\ln x = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2$

5) $\int_0^1 e^{-x} dx = -\int_0^1 (-e^{-x}) dx = -\int_0^1 (e^{-x})' dx$

$= -\int_0^1 de^{-x} = e^0 - e^{-1} = 1 - e^{-1}$

6) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{1/2} (\arcsin x)' dx = \int_0^{1/2} d\arcsin x = \arcsin x \Big|_0^{1/2}$

$= \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$

7) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

On a $\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow \left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)' dx = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \Rightarrow d\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$F'(x)dx = dF(x)$

$\Rightarrow \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_0^3 d\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^3$

$\Rightarrow \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(3+\sqrt{10}\right)$

$\int_a^b dF(x) = F(x)\Big|_a^b$

IX) - Intégration par parties

Théorème : Si u et v sont des fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$, alors

$\int_a^b uv' dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v dx$

Démonstration :

On a $uv' = (uv)' - u'v$.

Scanned with CamScanner

(avec uv', $(uv)'$, $u'v$ des fonctions continues sur $[a,b]$.

En intégrant, on obtient

$$\int_a^b uv'\,dx = \int_a^b (uv)'dx - \int_a^b u'v\,dx$$
$$= uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v\,dx.$$

Remarque:

En considérant que $v'dx = dv$, $u'dx = du$, on écrit la formule d'intégration par parties sous la forme:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int v\,du$$

Exples:

1) $\int_1^2 \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{v}$ $= x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\,d\ln x = 2\ln 2 -$

$$-\int_1^2 x(\ln x)'dx = 2\ln 2 - \int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$= 2\ln 2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - x\Big|_1^2 = 2\ln 2 + 1 - 2$$
$$= 2\ln 2 - 1.$$

2) $\int_1^2 x e^x dx = \int_1^2 x\underbrace{(e^x)'dx}_{de^x} = \int_1^2 \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{de^x}_{dv}$

$$= \int_1^2 x e^x dx = \int_1^2 x\,de^x = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 (e^x)'dx$$
$$= 2e^2 - e - \int_1^2 de^x = 2e^2 - e - e^x\Big|_1^2$$
$$= 2e^2 - e + e - e^2 = e^2$$

3) $\int_0^1 x e^{-x}dx = -\int_0^1 x(-e^{-x})\,dx = -\int_0^1 x(e^{-x})'dx$

$$= -\int_0^1 x\,de^{-x} = -\left(xe^{-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x}dx\right)$$
$$= -e^{-1} + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - \int_0^1 (e^{-x})'dx$$
$$= -e^{-1} - \int_0^1 de^{-x} = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1$$
$$= 1 - 2e^{-1}$$

Scanned with CamScanner

4) $\int_0^1 \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u}\,\underbrace{dx}_{v} = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\, d\operatorname{arctg} x$

$= \operatorname{arctg} 1 - \int_0^1 x \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx^2}{1+x^2}$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

X - Intégration par changement de variable.

Théorème: Si la fonction $x = \varphi(t)$ vérifie:

1) φ est de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$
2) $\varphi(t) \in [a,b]$ $\forall t \in [\alpha,\beta]$
3) $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$

Alors pour toute fonction f continue sur $[a,b]$, on a la formule de changement de variable.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

Démonstration:

Posons $F(u) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(u)} f(x)\,dx$, $u \in [\alpha,\beta]$

et

$$G(u) = \int_\alpha^u f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

On a: $F'(u) = \varphi'(u)\, f(\varphi(u))$

$G'(u) = f(\varphi(u))\,\varphi'(u)$

Comme F et G ont la même dérivée, alors

$F(u) = G(u) + \text{Const}$ ou $F(\alpha) = G(\alpha) = 0$

$\Rightarrow$ Const $= 0$

$\Rightarrow F = G$ sur $[\alpha,\beta]$ d'où $F(\beta) = G(\beta)$

C'-a-d $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$

Scanned with CamScanner

Exple: Calculer

1) $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = I$

Posons $x = \sin t$

$\Rightarrow dx = d\sin t = (\sin t)'dt = \cos t\,dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$

$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt$

$= \frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)'dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(0-0) \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$

2) $I = \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Posons $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2$

$\Rightarrow dx = 2t\,dt$

si $x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 4 \Rightarrow t = 2$

$\Rightarrow I = \int_0^2 \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{1+t}\,dt = 2\int_0^2 dt - 2\int \frac{d(t+1)}{1+t}$

$= 2t\Big|_0^2 - 2\ln|1+t|_0^2 = 4 - 2\ln 3$

XI – Somme de Riemann

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

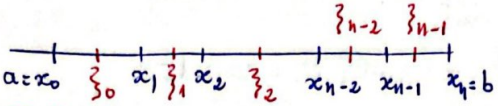
$\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ et

$\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$ n points de $[x_i, x_{i+1}]$

Scanned with CamScanner

C-à-d $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$

$d(\sigma) = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$



1) Définition 1 :

On appelle somme de Riemann relative à f, σ et au choix des points ξ_i , $i = \overline{0, n-1}$, le nombre

$$S_R(f, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i .$$

2) Définition 2 :

Par définition,

$$\lim_{d(\sigma) \to 0} S_R(f, \sigma) = I \quad (*)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall \sigma : d(\sigma) < \eta$$

$$\Rightarrow |S_R(f, \sigma) - I| < \varepsilon$$

3) Théorème :

Les deux (2) définitions suivantes sont équivalentes :

a) Si pour $d(\sigma) \to 0$ $\exists \lim S_R(f, \sigma) = I$

alors $f \in \mathcal{R}[a, b]$ et $\int_a^b f(x)\,dx = I$.

b) Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$, alors

$$\exists \lim_{d(\sigma) \to 0} S_R(f, \sigma) = \int_a^b f(x)\,dx$$

4) Remarque :

De l'unicité de la limite, on a l'unicité de l'intégrale de Riemann.

Scanned with CamScanner

Exples:

A l'aide de la somme de Riemann, Calculer les intégrales suivantes:

1) $I = \int_a^b dx$

Ici $f(x) = 1$, $f \in C[a,b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]$

Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$

Par définition

$$I = \lim_{d(\sigma)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \ i = \overline{0, n-1}$$

$$= \lim_{d(\sigma)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \lim_{d(\sigma)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)$$

$$= \lim_{d(\sigma)\to 0} (x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx = b - a$$

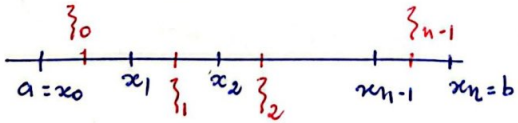
2) $I = \int_a^b x\,dx$

Ici $f(x) = x$, on a $f \in C[a,b]$

$\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]$

Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \Sigma[a,b]$

et $\xi_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$, $i = \overline{0, n-1}$



$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$

Par définition

$$I = \lim_{d(\sigma)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \lim_{d(\sigma)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i + x_{i+1}}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{d(\sigma)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}^2 - x_i^2) = \frac{1}{2} \lim_{d(\sigma)\to 0} (x_1^2 - x_0^2 + x_2^2 - x_1^2 + \dots$$

$$\dots + x_n^2 - x_{n-1}^2)$$

Scanned with CamScanner

$= \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = I$

3) $I = \int_1^2 x^2 dx$

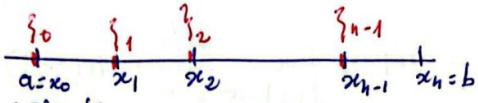
Ici $f(x) = x^2$

$f \in C[1,2] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[1,2]$.

Soit $\sigma = \left(x_i = 1 + \frac{i}{n},\ i = \overline{0,n}\right)$ une subdivision de $[1,2]$.

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = 1 + \frac{1+i}{n} - \left(1 + \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n} \to 0$ qd $n \to \infty$

Prenons $\xi_i = x_i \in [x_i, x_{i+1}]$



Par définition,

$$I = \lim_{d(\sigma)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{d(\sigma)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n^3}(n+i)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} \left(n^2 + 2ni + i^2\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left(\sum_{i=0}^{n-1} n^2 + 2n \sum_{i=0}^{n-1} i + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{n-1} i^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left(n^3 + 2n\,\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2(n-1)+1)}{6}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}\right].$$

$$= 1 + \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

Scanned with CamScanner

Exple : En utilisant la somme de Riemann, calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} S_n \text{ , avec } \quad S_n = \frac{n}{(n+1)^2} + \dots + \frac{n}{(2n)^2}$$

On a $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(n+i)^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$$

$$\{i = x_{i+1} = \frac{1+i}{n}$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\sigma = \left\{ x_i = \frac{i}{n} \ ; \ i = \overline{0,n} \right\}$$

$$\sigma \in \Sigma [0,1]$$

$$\Delta x_i = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{qd } n \to \infty \quad \Rightarrow d(\sigma) \to 0$$

D'où $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{d(\sigma)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, \Delta x_i = \int_0^1 f(x)$$

Scanned with CamScanner

Démonstration

a) f impaire $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$

$\forall x \in [-1,1]$

Posons $x = -t$ $\quad x = -a ; t = a$

$\Rightarrow dx = -dt$ et $\quad x = a \Rightarrow t = -a$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{-a} f(-t)\,dt = \int_{a}^{-a} f(t)\,dt$$

$$= -\int_{-a}^{a} f(t)\,dt \Rightarrow 2\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$$

b) f paire $\Rightarrow f(-x) = f(x)$

$\forall x \in [-a,a]$

On a $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)\,dx}_{\text{Posons } x=-t} + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$dx = -dt$

$x = -a \Rightarrow t = a$

$x = a \Rightarrow t = -a$

D'où $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

2) Si $f \in C(\mathbb{R})$ et périodique de période T

alors $\forall a \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$$

Demonstration

On a $\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{T} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{T}^{a+T} f(x)\,dx}_{\text{Posons } x=t+T}$

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow f(x) = f(t)$

$x = T \Rightarrow t = 0$

$x = a + T \Rightarrow t = a$

D'où $\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(x)dt = -\int_a^0 f(t)dt$ et

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Exples:

Calculer les intégrales suivantes:

a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 x + x^2 \sin x)dx$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \sin x\,dx$$

La fonction $x \to x^2 \sin x$ est impaire $\Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \sin dx = 0$

La fonction $x \to \cos^2 x$ est paire $\Rightarrow$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 x + x^2 \sin x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 + \cos x)dx = \int_0^{\pi/2} dx + \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}$

b) $\int_0^{2\pi} \sin^3 x \cos^4 x\,dx$

La fonction $x \to \sin^3 x \cos^4 x$ est périodique de période $T = 2\pi$, d'où

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x \cos^4 x\,dx = \int_{-\pi}^{-\pi+2\pi} \sin^3 x \cos^4 x\,dx$$

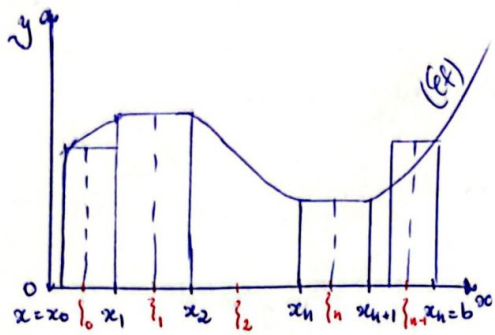
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos^4 x\,dx$$

La fonction $x \to \sin^3 x \cos^4 x$ est impaire, d'où

Scanned with CamScanner

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \cos^4 x \, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{I} = 0 .$$

XIII - L'intégrale géométrique de l'intégrale de Riemann d'une fonction positive.



Chaque terme de la somme de Riemann $S_R(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ est l'une des rectangles de base x_i, x_{i+1} et de hauteur $f(\xi_i)$.

Ainsi

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\sigma)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$ désigne l'aire algébrique du domaine limité par $x=a$, $x=b$. L'axe des abscisses est la courbe respective de f.

XIV - Théorème de la moyenne.

1er Théorème de la moyenne.

Soient f et g telles que

1) $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$

2) $\exists m, M ; \forall x \in [a,b] ; \; m \leq f(x) \leq M$.

3) g est de signe constant sur $[a,b]$.

Alors il existe $\mu \in [m,M]$ tel que :

Scanned with CamScanner

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

Démonstration

Supposons que :

$$g(x) \geq 0 \; ; \; \forall x \in [a,b].$$

Comme $m \leq f(x) \in M$, on a :

$$m\,g(x) \leq f(x)g(x) = M\,g(x)$$

$$\Rightarrow m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M \int_a^b f(x)\,dx$$

- Si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$; alors $\forall \mu \in [m,M]$; on a

$$0 = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

- Si $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$; alors $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ et

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M,$$

(C-à-d) $\exists\, \mu = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$; $m \leq \mu \leq M$ et tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Corollaire 1 :

Si de plus $f \in C[a,b]$, alors $\exists\, c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx \quad (*)$$

Démonstration

Posons $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$; $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$

Si $f \in C[a,b]$, alors $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$ tels que

$$f(x_1) = M \text{ et } f(x_2) = m$$

Comme $m \leq \mu \leq M$, alors

Scanned with CamScanner

d'après le Théorème des valeurs intermédiaires $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M$

D'où

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

Corollaire 2 : (1er Théorème de la moyenne).

Si $g = 1$, on retrouve par f continue sur $[a,b]$, la valeur moyenne ; (c-à-d) $\exists c \in [a,b]$, tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Remarque : On démontre que dans la formule (*), c peut-être bien choisi tel qu'il appartienne à $]a,b[$.

XV - Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème Soit f est $(n+1)$ fois dérivible et $f^{(n+1)} \in \mathcal{C}[a,b]$;
Soit $x_0 \in]a,b[$.
Alors on a la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x, x_0)$$

$\forall x \in [a,b]$.

avec

$$R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Démonstration

Comme f est $(n+1)$ fois dérivible sur $[a,b]$, alors $f^{(n+1)}$ est la primitive de $f^{(k)}$; $k = \overline{1, n+1}$ et de plus

$f^{(k)} \in \mathcal{C}[a,b]$; $k = \overline{1, n+1}$.

On a : $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} df(t) = f(x) - f(x_0)$;

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$; $\forall x \in [a,b]$.

Scanned with CamScanner

La formule est vraie pour $n=0$

$$f(x) = f(x_0) - \int_{x_0}^{x} f(t)\, d(x-t)$$

En intégrant par parties :

$$f(x) = f(x_0) - (x-t) f(t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} (x-t)\, d f'(t)$$

$$= f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\, dt$$

La formule est vraie pour $n=1$

Par récurrence, supposons que la formule est vraie à l'ordre $n=1$, (c-à-d)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1} f^{(n)}(t)\, dt$$

et montrons qu'elle est vraie à l'ordre n.

Comme $f^{(n)}$ est la primitive de $f^{(n+1)} \in \mathcal{R}[a,b]$, alors en intégrant par parties l'intégrale de $(*)$, on a :

$$\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\, dt = -\frac{1}{n} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\, d(x-t)^n$$

$$= -\frac{1}{n} (x-t)^n f^{(n)}(t)\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{n} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

$$= \frac{1}{n} (x-x_0)^n f^{(n)}(x_0) + \frac{1}{n} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

En remplaçant dans $(*)$, on obtient,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{1}{n} (x-x_0)^n f^{(n)}(x_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt \right]$$

D'où

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Corollaire :

Si $f \in C^{(n+1)}[a,b]$ alors $\exists\, c \in [x_0, x]$ tel que

$$2n(x, x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Scanned with CamScanner

(C'-à-d) le reste de Lagrange-

Démonstration

On a

$$R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Si $f \in C^{(n+1)}[a,b]$, alors d'après le 1er Théorème de la moyenne

$\exists\, c \in [x_0, x]$ tel que :

$$R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c) \int_{x_0}^{x} (x-t)^n\, dt$$

$$= -\frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c)\, (x-t)^{n+1} \Big|_{x_0}^{x}$$

$$= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Scanned with CamScanner

Chapitre II : Intégrales indéfinies et méthodes de calcul des intégrales.

I - Intégrales indéfinies

1. Rappel :

Soit f et g deux fonctions définie

Théorème : Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont des primitives de $f(x)$ sur I, alors $F_1(x) - F_2(x) = C$, C = cste.

Corollaire : Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur I, alors toutes autre primitive $\Phi(x)$ de f sur I, se met sous la forme :

$$\Phi(x) = F(x) + C .$$

2. Définition

L'ensemble de toutes les primitives de $f(x)$ sur I est appélé intégrale indéfinie de $f(x)$ sur I et se note

$$\int f(x)\,dx .$$

Remarque :

D'après le Théorème précédent, on a :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \text{ ; où } F(x) \text{ est une primitive de } f(x) \text{ ; } C = \text{cste}$$

3 - Propriétés de l'intégrale indéfinie

a) $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$

Scanned with CamScanner

En effet, $d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(F(x)+c\right) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$.

b) $\int dF(x) = F(x)+c$

c) Linéarité

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\int (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx .$$

4 - Formule d'intégration par changement de variable.

En $x = \varphi(t)$, $\varphi(t)$ une fonction continue, on a

$$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt$$

D'où on a la formule de changement de variable :

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$$

5 - Formule d'intégration par partie

Si $u, v \in C^1$, alors

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du .$$

II - Méthodes de calcul des intégrales.

1 - Fraction rationnelle

Soit la fonction rationnelle de la forme :

$$F(x) = \frac{P(x)}{\varphi(x)}$$, avec F une fonction rationnelle

P, φ des polynômes,

Si $\partial^\circ P \geq \partial^\circ \varphi$ alors la division euclidienne de P par φ donne

$$F(x) = E(x) + \frac{R(x)}{\varphi(x)}$$, avec $\partial^\circ R < \partial^\circ \varphi$,

$E(x)$ est une polynôme appelé partie entière.

Scanned with CamScanner

On décompose $\frac{R(x)}{Q(x)}$ en éléments simples de 1ère espèce $\frac{\alpha}{(x-a)^n}$ et 2ème espèce $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$, avec $p^2-4q<0$, $n, m \in \mathbb{N}^*$

* Intégration du polynôme $E(x)$:

On utilise :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

* Intégration de $\frac{1}{(x-a)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$.

— Si $n = 1$, alors

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$$

— Si $n \neq 1$, alors

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$$

* Intégration de $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, avec $p^2-4q<0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

— Si $n = 1$, on fait apparaître la dérivée de x^2+px+q ($c-\bar{a}-d$) $2x+p$ au numérateur.

On a :

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} = \frac{\frac{M}{2}(2x+p) - \frac{Mp}{2} + N}{x^2+px+q} \quad \text{et} \quad \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} +$$

$$+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}}$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dX}{X^2+b^2}$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{1}{b}\left(N - \frac{Mp}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{X}{b} + C$$

Scanned with CamScanner

$$= \frac{M}{2} \ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-MP}{2b} \operatorname{arctg} \frac{2x+P}{2b} + C_1$$

- avec $b = \sqrt{q - \frac{P^2}{4}}$.

- Si $n > 1$, on a

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx = \frac{M}{2} \int \frac{2x+P}{(x^2+px+q)^n} dx + \left(N - \frac{MP}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} + \left(N - \frac{MP}{2}\right) \int \frac{d\left(x+\frac{P}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{P}{2}\right)^2 + q - \frac{P^2}{4}\right]^n}$$

$$= \frac{M}{2} \frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(N - \frac{MP}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+b^2)^n}$$

Posons $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+b^2)^n} = \frac{1}{b^2} \int \frac{(b^2+x^2)-x^2}{(x^2+b^2)^n} dx$

$$I_n = \frac{1}{b^2} I_{n-1} - \frac{1}{b^2} \int x \frac{dx}{(x^2+b^2)^n} = \frac{1}{b^2} I_{n-1} - \frac{1}{2b^2} \int x \frac{d(x^2+b^2)}{(x^2+b^2)^n}$$

$$= \frac{1}{b^2} I_{n-1} + \frac{1}{2b^2(n-1)} \int x \, d(x^2+b^2)^{-n+1}$$

$$= \frac{1}{b^2} I_{n-1} + \frac{x}{2b^2(n-1)(x^2+b^2)^{n-1}} - \frac{1}{2b^2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+b^2)^{n-1}}$$

$$I_n = \frac{1}{b^2} I_{n-1} + \frac{x}{2b^2(n-1)(x^2+b^2)^{n-1}} - \frac{1}{2b^2(n-1)} I_{n-1}$$

$$I_n = \frac{x}{2b^2(n-1)(x^2+b^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2b^2(n-1)} I_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

avec $X = x + \frac{P}{2}$, $b = \sqrt{q - \frac{P^2}{4}}$

$$I_1 = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{X}{b} + C$$

Exples: Calculer les intégrales suivantes :

- $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

On a : $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$

avec

$$A = (x-a) \cdot \frac{1}{x^2-a} \Big|_{x=a} = \frac{1}{x+a} \Big|_{x=a} = \frac{1}{2a}$$

Scanned with CamScanner

$$B = (x+a)\frac{1}{x^2-a}\Big|_{x=-a} = \frac{1}{x-a}\Big|_{x=-a} = -\frac{1}{2a}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\int\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

D'où $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

* $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\int \frac{d\frac{x}{a}}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

C'-a-d $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$

* $$\int \frac{x+1}{x^4-x}dx.$$

Posons $$F(x) = \frac{x+1}{x^4-x} = \frac{x+1}{x(x^3-1)} = \frac{x+1}{x(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

C avec

$$A = xF(x)\Big|_{x=0} = \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}\Big|_{x=0} = -1$$

$$B = (x-1)F(x)\Big|_{x=1} = \frac{x+1}{x(x^2+x+1)}\Big|_{x=1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0 = A+B+C$$

$$\Rightarrow C = -(A+B) = -\left(-1+\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$F(-1) = 0 = -A - \frac{B}{2} + \left(-\frac{C+D}{1}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = 2A + B + 2C - 2D \Rightarrow D = \frac{1}{2}(2A+B+2C)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3} \Rightarrow D = -\frac{1}{3}$$

D'où

$$F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{2}{3(x-1)} + \frac{x-1}{3(x^2+x+1)}$$

$$\Rightarrow I = -\int\frac{dx}{x} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx$$

$$= -\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\int\frac{2x-2}{x^2+x+1}dx$$

$$= -\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\int\frac{2x+1-3}{x^2+x+1}dx$$

Scanned with CamScanner

$$I = -\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= -\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$= -\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + C$$

$$\Rightarrow I = -\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$* I = \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{(x^2+2x+3)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-4}{(x^2+2x+3)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}dx - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+3)}{(x^2+2x+3)^2} - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}$$

$$I = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} - I_1$$

$$I_1 = 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = 2\int \frac{d(x+1)}{[(x+1)^2+2]^2} = 2\int \frac{dt}{(t^2+2)^2}, \quad t = x+1$$

$$I_1 = \frac{2}{2}\int \frac{t^2+2-t^2}{(t^2+2)^2}dt = \int \frac{dt}{t^2+2} - \int t\,\frac{tdt}{(t^2+2)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int t\,\frac{d(t^2+2)}{(t^2+2)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int t\,d\frac{1}{t^2+2}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\left[\frac{-t}{t^2+2} - \int \frac{dt}{t^2+2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2(t^2+2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C_1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2(t^2+2)} + C_1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + C_1$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} - \frac{x+1}{2(x^2+2x+3} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

$$\Rightarrow I = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

Scanned with CamScanner

Remarque:

Pour calculer certaines intégrales des fonctions rationnelles, il est plus commender d'utiliser d'autres méthodes plus rapide.

Exples:

- $\int \frac{dx}{x^3(x^2-2)} = \int \frac{x\,dx}{x^4(x^2-2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^4(x^2-2)}$

Posons $t = x^2$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2(t-2)} = -\frac{1}{4}\int \frac{t+2-t}{t^2(t-2)}\,dt = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(t-2)t}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{4t} + \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{4t} + \frac{1}{8}\ln|t-2| - \frac{1}{8}\ln|t| + C$

$= \frac{1}{4t} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{t-2}{t}\right| + C$

$I = \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{8}\ln\frac{x^2-2}{x^2} + C$

- $\int \frac{x^7\,dx}{x^{16}+1} = \frac{1}{8}\int \frac{dx^8}{(x^8)^2+1} = \frac{1}{8}\arctg x^8 + C$.

III - Intégrales de la forme $\int \sin^n x \cos^m x\,dx$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

1. Si n et $m \in \mathbb{N}$ et sont pairs, on utilise les formules suivantes:

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$; $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

2. Si $n, m \in \mathbb{N}$ et
   - si m est impair, alors on pose $t = \sin x$
   - si n est impair, alors on pose $t = \cos x$

ensuite, on utilise les formules suivantes:

$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

ou

$1 - \sin^2 x = \cos^2 x$

3. Si n et m sont des entiers négatifs tels que $|m|$ et $|n|$ sont pairs ou impairs, alors on pose:

Scanned with CamScanner

$t = \operatorname{tg} x$ ou $t = \operatorname{ctg} x$ et on utilise les formules suivantes :

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

4. Si n et m sont des entiers négatifs et $|n|$ ou $|m|$ est impair, alors :
   - si $|m|$ est impair, on pose $t = \sin x$
   - si $|n|$ est impair, on pose $t = \cos x$

Remarque : Dans le cas où $|n|$ et $|m|$ sont assez grands, on peut au numérateur remplacer successivement 1 par $\sin^2 x + \cos^2 x$.

5. Si n est un entier pair et m un entier négatif, on utilise la formule $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.
   - Si m est pair et n un entier négatif, on utilise la formule $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Dans certains cas, on pose : $t = \operatorname{tg} x$.

6. Si n est impair et m un entier négatif, on pose $t = \cos x$ et on utilise la formule $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.
   - Si m est impair et n un entier négatif, on pose $t = \sin x$, et on utilise la formule $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Remarque : On utilise le plus souvent les formules suivantes :

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right]$$

Exples : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)\, dx$

$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)\, dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \, dx$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\, dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$

Scanned with CamScanner

$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$

* $\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx = I$

$n = 3$ - impair, on pose $t = \cos x$

$\Rightarrow I = -\int \sin^2 x \cos^4 x \, d\cos x$

$= -\int (1 - \cos^2 x)\cos^4 x \, d\cos x = -\int \cos^4 x \, d\cos x + \int \cos^6 x \, d\cos x$

$= -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C$

* $\int \cos^3 x \sin^8 x \, dx$:

Ici $m = 3$, impair, on pose $t = \sin x$

$\Rightarrow I = \int \cos^2 x \sin^8 x \, d\sin x = \int (1 - \sin^2 x)\sin^8 x \, d\sin x$

$= \int \sin^8 x \, d\sin x - \int \sin^{10} x \, d\sin x = \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{\sin^{11} x}{11} + C$

* $\int \sin 2x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int (\sin(2x - x) + \sin(2x + x)) \, dx$

$= \frac{1}{2}\int (\sin x + \sin 3x) \, dx = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{6}\cos 3x + C$

* $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \tan x - x + C$

* $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin x}$

$= -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{1}{\cos x} + \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C$

* $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{2\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}} = \int \frac{d\tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}}$

$= \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C$

Scanned with CamScanner

III. Intégration des fonctions contenant les racines $\sqrt{a^2 \pm x^2}$, $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, $a \neq 0$.

1. Si la fonction contient la racine $\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$, alors on pose $x = a \sin t$

La fonction $x \to \sqrt{a^2 - x^2}$ est définie par $|x| \leq a$, la primitive se cherche sur l'intervalle $]-a, a[$ ou $a - a < a \sin t < a$

$\Rightarrow -1 < \sin t < 1$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

et

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} = a\sqrt{\cos^2 t} = a|\cos t|$$

Sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos t > 0$,

alors $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$

2. Si la fonction contient $\sqrt{x^2 - a^2}$, $a > 0$ alors on pose

$$x = \frac{a}{\cos t}$$

Dans ce cas la primitive se cherche pour $x > a$ ou $x < -a$.

Pour $x > a$, on prend $0 < t < \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = a\sqrt{tg^2 t} = a|tg t|$$

Sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, $tg t > 0$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - a^2} = a tg t$$

On peut aussi, poser $x = a \operatorname{ch} t$,

alors

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\operatorname{ch}^2 t - 1)} = a|\operatorname{sh} t|$$

3. Si la fonction contient $\sqrt{a^2 + x^2}$, $a > 0$, alors on peut poser $x = a tg t$.

La primitive $x \to a tg t$ est continuement différentiable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et prend valeur sur $\mathbb{R}$

D'où

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2(tg^2 t + 1)} = \frac{a}{\cos t}$$

Scanned with CamScanner

On peut aussi poser $x = a\,\mathrm{sh}\,t$

alors $\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\mathrm{sh}^2 t + 1)} = a\,\mathrm{ch}\,t$

Rappel : On a $\mathrm{th}\,x = \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$, $\mathrm{cth}\,x = \dfrac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}$

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

$$\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}\,2x$$

$$\mathrm{sh}\,2x = 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x$$

$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\,2x + 1}{2}, \quad \mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}\,2x - 1}{2}$$

Exple : Calculer les intégrales suivantes

1°) $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, $a > 0$.

Posons $x = a\sin t$, $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\Rightarrow dx = a\cos t\,dt$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = a\cos t$$

D'où $I = a^2 \int \cos^2 t\,dt = \dfrac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)\,dt$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C$$

On a $\sin t = \dfrac{x}{a} \Rightarrow t = \arcsin\dfrac{x}{a}$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t$$

$$= 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \sin 2t = 2\frac{x}{a}\sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)}$$

$$= 2\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = 2\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C}$$

Scanned with CamScanner

2) $I = \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$, $a>0$

Posons $x = a\,\mathrm{sh}\,t$

$\Rightarrow dx = a\,\mathrm{ch}\,t\,dt$ et $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\,\mathrm{sh}^2 t} = a\,\mathrm{ch}\,t$

$\Rightarrow I = \int a^2\,\mathrm{ch}^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int(\mathrm{ch}\,2t+1)\,dt = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2t + t\right)+C$

$\Rightarrow I = \frac{a^2}{2}\left(\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t + t\right)+C$ Or on a :

$\mathrm{sh}\,t = \frac{x}{a}$

$\mathrm{ch}\,t = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t} = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2}$

$e^t = \mathrm{sh}\,t + \mathrm{ch}\,t = \frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2}$

$\Rightarrow e^t = \frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}$ $\Rightarrow t = \ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}$

Donc $\boxed{I = \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2+x^2} + \ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right)+C}$

$\Rightarrow \boxed{\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}+C}$

IV – Intégrales de la forme $\int F(e^x, e^{2x}, \dots e^{nx})\,dx$, où F est une fonction rationnelle

En posant $z = e^x$,

On obtient $dz = z\,dx$

$\Rightarrow dx = \frac{dz}{z}$ et $F(e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx}) = F(z, z^2, \dots, z^n)$

Exples: Calculer

$$\int \frac{e^x dx}{(1+e^{2x})^2}$$

Posons $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx = t\,dx$.

$\Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

$\Rightarrow \int \frac{e^x dx}{(1+e^{2x})^2} = \int \frac{t\,\frac{dt}{t}}{(1+t^2)^2}$

Scanned with CamScanner

$$= \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dt}{1+t^2} - \int t\,\frac{t\,dt}{(1+t^2)^2} = \int \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int t\,\frac{d(1+t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$$= \int \frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{2}\int t\,d\,\frac{1}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+t^2} - \int \frac{dt}{1+t^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^x\,dx}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x}{2(1+e^{2x})} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^x + C$$

V. Intégrales de la forme $I = \int x^m \cdot (ax^n+b)^p\,dx$, où $a,b \in \mathbb{R}^*$, $m,n,p \in \mathbb{Q}$, $n \neq 0$ et $p \neq 0$.

On ramène l'intégrale à l'intégrale des fonctions rationnelles dans les trois (3) cas suivants :

1er Cas : Si $p \in \mathbb{Z}$.

- Si $p > 0$, on développe l'expression qui est l'intégrale à l'aide de la formule de binôme de Newton.
- Si $p < 0$, on pose $x = t^q$, où q est dénominateur commun de m et n.

2e Cas : Si $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$,

alors on pose

$$ax^n + b = t^s,$$ où s est le dénominateur de p.

3e Cas : Si $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$,

alors on pose

$$ax^n + b = t^s x^n,$$ où s est le dénominateur de p.

Exple : Calculer les intégrales suivantes :

1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt[4]{x}+1)^{10}} = \int x^{-1/2}\left(x^{1/4}+1\right)^{-10} dx$$

Scanned with CamScanner

Ici $m=-1/2$, $n=\frac{1}{4}$ et $P=-10 \in \mathbb{Z}$ et $P<0$

On pose $x=t^4$

$\Rightarrow dx=4t^3dt$

$\sqrt{x}=x^{1/2}=(t^4)^{1/2}=t^2$

$\sqrt[4]{x}=x^{1/4}=(t^4)^{1/4}=t$

$$\Rightarrow I=\int \frac{4t^3dt}{t^2(t+1)^{10}}=4\int\frac{7dt}{(t+1)^{10}}=4\int\frac{t+1-1}{(t+1)^{10}}dt$$

$$=4\int\frac{dt}{(t+1)^9}-4\int\frac{dt}{(t+1)^{10}}=\frac{-4}{8(t+1)^8}+\frac{4}{9(t+1)^9}+C$$

$$=\frac{-1}{2(\sqrt[4]{x}+1)^8}+\frac{4}{9(\sqrt[4]{x}+1)^9}+C$$

2) $I=\int x^3\sqrt{1+x^2}^2dx=\int x^3(1+x^2)^{1/2}dx$

Ici $m=3$, $n=2$ et $P=\frac{1}{2}$; $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2\in\mathbb{Z}$

Posons $1+x^2=t^2$

$\Rightarrow x^2=t^2-1 \Rightarrow xdx=tdt$

et $\int x^3\sqrt{1+x^2}dx=\int x^2\sqrt{1+x^2}xdx$

$$=\int(t^2-1)(t^2)^{1/2}tdt=\int t^2(t^2-1)dt$$

$$=\int(t^4-t^2)dt=\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3+C$$

$$=\frac{1}{5}(t^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}(t^2)^{3/2}+C$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{5}(1+x^2)^{5/2}-\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+C$$

$$=\frac{1}{15}(1+x^2)^{3/2}\left[3(1+x^2)-5\right]+C$$

$$\boxed{I=\frac{1}{15}(1+x^2)^{3/2}(3x^2-2)+C}$$

Remarque: Si la fonction qui est sous l'intégrale est une fonction transcendante composée de $\varphi(x)$, alors il est commander de poser $\varphi(x)=t$.

Scanned with CamScanner

$$= \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dt}{1+t^2} - \int t\,\frac{t\,dt}{(1+t^2)^2} = \int \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int t\,\frac{d(1+t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$$= \int \frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{2}\int t\,d\,\frac{1}{1+t^2} = \int \frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+t^2} - \int \frac{dt}{1+t^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\arctg t + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^x\,dx}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x}{2(1+e^{2x})} + \frac{1}{2}\arctg e^x + C$$

V. Intégrales de la forme $I = \int x^m \cdot (ax^n+b)^p\,dx$,

où $a, b \in \mathbb{R}^*$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$, $n \neq 0$ et $p \neq 0$.

On ramène l'intégrale à l'intégrale des fonctions rationnelles dans les trois (3) cas suivants :

1er Cas : Si $P \in \mathbb{Z}$.

- Si $P > 0$, on développe l'expression qui est l'intégrale à l'aide de la formule de binôme de Newton.
- Si $P < 0$, on pose $x = t^q$, où q est dénominateur commun de m et n.

2e Cas : Si $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$,

alors on pose

$$ax^n + b = t^s,$$ où s est le dénominateur de P.

3e Cas : Si $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$,

alors on pose

$$ax^n + b = t^s x^n,$$ où s est le dénominateur de P.

Exple : Calculer les intégrales suivantes :

1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(\sqrt[4]{x}+1)^{10}} = \int x^{-1/2}\left(x^{1/4}+1\right)^{-10} dx$$

Scanned with CamScanner

Si $m=-1/2$, $n=\frac{1}{4}$ et $P=-10 \in \mathbb{Z}$ et $P<0$

On pose $x=t^4$

$\Rightarrow dx=4t^3dt$

$\sqrt{x}=x^{1/2}=(t^4)^{1/2}=t^2$

$\sqrt[4]{x}=x^{1/4}=(t^4)^{1/4}=t$

$$\Rightarrow I=\int \frac{4t^3dt}{t^2(t+1)^{10}}=4\int \frac{tdt}{(t+1)^{10}}=4\int \frac{t+1-1}{(t+1)^{10}}dt$$

$$=4\int \frac{dt}{(t+1)^9}-4\int \frac{dt}{(t+1)^{10}}=\frac{-4}{8(t+1)^8}+\frac{4}{9(t+1)^9}+C$$

$$=\frac{-1}{2(\sqrt[4]{x}+1)^8}+\frac{4}{9(\sqrt[4]{x}+1)^9}+C$$

2) $I=\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx=\int x^3(1+x^2)^{1/2}dx$

Si $m=3$, $n=2$ et $P=\frac{1}{2}$; $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2 \in \mathbb{Z}$

Posons $1+x^2=t^2$

$\Rightarrow x^2=t^2-1 \Rightarrow xdx=tdt$

et $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx=\int x^2\sqrt{1+x^2}\,xdx$

$$=\int (t^2-1)(t^2)^{1/2}t\,dt=\int t^2(t^2-1)dt$$

$$=\int (t^4-t^2)dt=\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3+C$$

$$=\frac{1}{5}(t^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}(t^2)^{3/2}+C$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{5}(1+x^2)^{5/2}-\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+C$$

$$=\frac{1}{15}(1+x^2)^{3/2}\left[3(1+x^2)-5\right]+C$$

$$\boxed{I=\frac{1}{15}(1+x^2)^{3/2}(3x^2-2)+C}$$

Remarque: Si la fonction qui est sous l'intégrale est une fonction transcendante composée de $\varphi(x)$, alors il est commander de poser $\varphi(x)=t$.

Scanned with CamScanner

Exple :

$$I = \int e^{-\sqrt[3]{x+1}}\, dx$$

Posons $-\sqrt[3]{x+1} = t$

$\Rightarrow x+1 = -t^3 \Rightarrow dx = -3t^2 dt$

$$I = \int e^t (-3t^2 dt) = -3\int t^2 e^t dt = -3\int t^2 de^t$$

$$= -3\left(t^2 e^t - 2\int t e^t dt\right)$$

$$= -3t^2 + 6\int t\, de^t = -3t^2 + 6te^t - 6e^t + C$$

$$\Rightarrow I = (-3t^2 + 6t - 6)e^t + C_1$$

avec $t = -\sqrt[3]{x+1}$

VI - Intégrale de la forme

1) $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$

2) $\int (Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$

3) $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

On met le trinôme sous forme canonique

$ax^2+bx+c = a(x+\beta)^2 + q$,

Pour 1) et 2) On pose $x+\beta = z$,

alors on obtient

1') $\int \frac{A_1 z + B_1}{\sqrt{az^2+a}}\, dz$

2') $\int (A_1 z + B_1)\sqrt{az^2+q}\, dz$

Le calcul de ces intégrales se ramène selon le signe de a, au calcul des intégrales de la forme.

$$\int \frac{Cz+D}{\sqrt{z^2 \pm r^2}}\, dz, \quad \int \frac{Cz+D}{\sqrt{r^2-z^2}}\, dz, \int (Cz+D)\sqrt{r^2-z^2}\, dz.$$

Scanned with CamScanner

$\int (Ct+D)\sqrt{t^2 \pm k^2}\, dt$.

Exple : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\, dx$

On a : $x^2-4x+5 = (x-2)^2+1$

Posons $t = x-2$

$\Rightarrow dt = dx$

$I = 3\int \frac{t\, dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{3}{2}\int \frac{dt^2}{\sqrt{t^2+1}}$

$I = \frac{3}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}} = 3\sqrt{t^2+1} + C = 3\sqrt{x^2-4x+5} + C$

2) $\int (x+2)\sqrt{x^2+x+1}\, dx = \int \left[\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\right]\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\, dx$

Posons $t = x+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow I = \int \left(t+\frac{3}{2}\right)\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\, dt = \int t\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\, dt + \frac{3}{2}\int \sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\, dt$

$= \frac{1}{2}\int \sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\, d\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2}\int \sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\, dt$

$= \frac{1}{3}\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^{3/2} + \frac{3}{2}\, t\frac{\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{8}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{4}}\right| + C$

$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{3/2} + \frac{3}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{9}{16}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C$

Pour le calcul de 3) ;

$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)}$,

On pose $x-\alpha = \frac{1}{z}$, alors

$\int \frac{dz}{z\sqrt{az^2+bz+c}} = \int \frac{-dz}{z|z|\sqrt{a+\frac{b}{z}+\frac{c}{z^2}}}$

Scanned with CamScanner

Pour $x > \alpha$, on a $z > 0$,

On pose : $\frac{1}{z} = t$ et $\int \frac{dz}{z^2\sqrt{a+\frac{b_1}{z}+\frac{c_1}{z^2}}} = \int \frac{d(-1/z)}{\sqrt{a+\frac{b_1}{z}+\frac{c_1}{z^2}}}$

$= -\int \frac{dt}{\sqrt{a+b_1 t+c_1 t^2}}$

Remarque : On peut aussi directement poser $\frac{1}{x-\alpha} = z$

Exple : Calculer

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$$

Posons $t = \frac{1}{x-1}$

$\Rightarrow dt = -\frac{dx}{(-1+x)^2}$

On a : $I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-(x-1)}} = \int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{1-\frac{1}{x-1}}}$

$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \int \frac{d(1-t)}{\sqrt{1-t}} = 2\sqrt{1-t} + C$

$\Rightarrow I = 2\sqrt{1-\frac{1}{x-1}} + C = 2\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} + C$

VII. Intégrale de la forme $\int F(\sin x, \cos x)\,dx$,

où F est une fonction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$. En posant $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

On peut ramener l'intégrale à une intégrale des fonctions rationnelles :

Dans le Cos :

- $\sin x = \frac{2\sin x/2 \cos x/2}{\cos^2 x/2 + \sin^2 x/2} = \frac{2\sin x/2 \cos x/2}{\cos^2 x/2\left(1+\frac{\sin^2 x/2}{\cos^2 x/2}\right)} = \frac{2\sin x/2}{\cos x/2\left(1+\frac{\sin^2 x/2}{\cos^2 x/2}\right)}$

$= \frac{2\operatorname{tg} x/2}{1+\operatorname{tg}^2 x/2} = \frac{2t}{1+t^2} \Rightarrow \boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$

- $\cos x = \frac{\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2}{\cos^2 x/2 + \sin^2 x/2} = \frac{1-\frac{\sin^2 x/2}{\cos^2 x/2}}{1+\frac{\sin^2 x/2}{\cos^2 x/2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x/2}{1+\operatorname{tg}^2 x/2}$

Scanned with CamScanner

$$= \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow \boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

* $\operatorname{arctg} t = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t$

$$\Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Exple: Calculer

$$\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x} = \int \frac{dx}{6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2} \left(1 + 6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)} = -2 \int \frac{d \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}$$

$$= -2 \int \frac{dt}{t^2 - 6t - 1} = -2 \int \frac{dt}{(t-3)^2 - 10} = \frac{-1}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{t - 3 - \sqrt{10}}{t - 3 + \sqrt{10}} \right| + C$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 - \sqrt{10}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 + \sqrt{10}} \right| + C .$$

Remarque: On peut faire aussi les changement suivants:

1) Si $F(-\sin x, \cos x) = -F(\sin x, \cos x)$
   On pose $t = \cos x$
2) Si $F(\sin x, -\cos x) = -F(\sin x, \cos x)$
   On pose $t = \sin x$
3) Si $F(-\sin x, -\cos x) = F(\sin x, \cos x)$
   On pose $t = \operatorname{tg} x$, $t = \cos 2x$, ou $t = \operatorname{ctg} x$

Exple: Calculer les intégrales suivants:

1) $$\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$$

On a: $F(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos^2 x}$ et

$F(-\sin x, \cos x) = -F(\sin x, \cos x)$

Posons $t = \cos x$

$\sin^2 x = 1 - t^2$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$

Scanned with CamScanner

$dt = -\sin x\,dx$

$$\Rightarrow I = \int \frac{(1+\sin^2 x)\sin x}{\cos 2x}\,dx = -\int \frac{(2-t^2)\,dt}{2t^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-4}{2t^2-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-1-3}{2t^2-1}\,dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1} = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^2-1/2}$$

$$= \frac{1}{2}t - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-1/\sqrt{2}}{t+1/\sqrt{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}t - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right| + C$$

$$I = \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C$$

2) $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x(\sin x + \cos x)}$; $F(-\sin x, -\cos x) = F(\sin x, \cos x)$.

On pose ; $t = \operatorname{tg} x$

$$\Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}\ ;$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{\cos^2 x\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}\right)} = \int \frac{dx}{\cos^2 x\left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right)}$$

$$= \int \frac{d\operatorname{tg} x}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \int \frac{\operatorname{tg} x\, d\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \int \frac{t\,dt}{1+t} = \int \frac{t+1-1}{1+t}\,dt$$

$$= \int dt - \int \frac{dt}{1+t} = t + \ln|1+t| + C = \operatorname{tg} x + \ln|1+\operatorname{tg} x| + C$$

IV - Intégrales de la forme $\int F(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$, où F est une fonction rationnelle en $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$

En posant $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$,

On peut ramener ces intégrales aux intégrales des fonctions rationnelles.

Dans ce cas

Scanned with CamScanner

• $\text{sh}x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\text{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ et $dx = \frac{2dt}{1-t^2}$

On peut aussi utiliser les changements :
$t = \text{sh}x$, $t = \text{ch}x$, $t = \text{th}x$, ...
Dans ce cas on utilise en gardant les formules :

$\text{ch}^2x - \text{sh}^2x = 1$; $\text{sh}^2x = \frac{1}{2}(\text{ch}2x - 1)$

$\text{ch}^2x = \frac{1}{2}(\text{ch}2x + 1)$; $\text{sh}x\,\text{ch}x = \frac{1}{2}\text{sh}2x$.

Exemples:

1) $\int \frac{dx}{\text{sh}x} = I$

Posons $t = \text{th}\frac{x}{2}$

$\Rightarrow dt = \frac{2dx}{1-t^2}$; $\text{sh}x = \frac{2t}{1-t^2}$

$\Rightarrow I = \int \frac{2dt}{1-t^2} \cdot \frac{1-t^2}{2t} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$

$\Rightarrow I = \ln\left|\text{th}\frac{x}{2}\right| + C$

2) $\int \text{ch}^3x\,\text{sh}^8x\,dx = I$

$\Rightarrow I = \int \text{ch}^2x\,\text{sh}^8x\,d\text{sh}x = \int (1+\text{sh}^2x)\,\text{sh}^8x\,d\text{sh}x$

Posons $t = \text{sh}x$

$\Rightarrow I = \int (1+t^2)t^8\,dt = \int (t^8 + t^{10})\,dt = \frac{1}{9}t^9 + \frac{1}{11}t^{11} + C$

$= \frac{1}{9}\text{sh}^9x + \frac{1}{11}\text{sh}^{11}x + C$

X - Intégrales de la forme

$$I = \int F\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx \quad (*)$$

où F est une fonction rationnelle en

$x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}$, $r_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$

ayant même dénominateur, c-à-d $r_i = \frac{p_i}{m}$,

$m \in \mathbb{N}^*$, $p_i \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1,n}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

Scanned with CamScanner

(ad - bc ≠ 0)

On pose $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$ et $x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} = \varphi(t)$ une fonction rationnelle.

On a : $dx = \varphi'(t)\,dt$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{n_i} = (t^m)^{n_i} = (t^m)^{\frac{p_i}{m}} = t^{p_i},\ i = \overline{1,n}$$

Alors $I = \int F(\varphi(t), t^{p_1}, \dots, t^{p_n})\,\varphi'(t)\,dt$

$= \int \bar{F}(t)\,dt$ avec $\bar{F}(t) = F(\varphi(t), t^{p_1}, \dots, t^{p_n})\,\varphi'(t)$

c une fonction rationnelle qui s'intègre en utilisant le point I.

Remarque : Les intégrales de la forme :

$$\int F(x, (ax+b)^{n_1}, \dots, (ax+b)^{n_n})\,dx \quad ; a \neq 0$$

et

$\int F(x, x^{n_1}, \dots, x^{n_m})\,dx$ se calculent de la même façon que (*).

Exple : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

On a $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

Posons $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$

$\sqrt{x} = (t^6)^{1/2} = t^3$; $\sqrt[3]{x} = (t^6)^{1/3} = t^2$

$$\Rightarrow I = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3\,dt}{t+1} = 6\int (t^2 - t + 1)\,dt -$$

$$- 6\int \frac{dt}{t+1} = 6\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t\right) - 6\ln|t+1| + C$$

$$I = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + C$$

Scanned with CamScanner

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\frac{2+x}{2-x}(2-x)^6}}$

$= \int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \frac{dx}{(2-x)^2}$

Posons $\frac{2-x}{2+x} = t^3 \Rightarrow x = 2\frac{1-t^3}{1+t^3}$

$dx = -12\frac{t^2 dt}{(1+t^3)^2}$; $\frac{1}{2-x} = \frac{1+t^3}{4t^3}$

$\Rightarrow I = \int -12 \frac{(t^3+1)^2 t^3}{16t^6(t^3+1)^2} dt = -\frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^3}$

$= \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{t^2} + C$

$= \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{t^2} + C = \frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\right)^{-2} + C$

$\Rightarrow I = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C$

XI - Intégrales de la forme

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$ où F est une fonction rationnelle.

En utilisant la division euclidienne, on met F sous la forme

$F(x) = P(x) + \frac{R(x)}{\varphi(x)}$, $\partial^\circ R < \partial^\circ \varphi$ et en décomposant $\frac{R(x)}{\varphi(x)}$ en éléments simples, on se ramène à l'intégration des intégrales du type :

a) $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, $P_n(x)$ est un polynôme de degré n.

b) $\int \frac{A\,dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $A = \text{Const}$

c) $\int \frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $M, N = \text{Const}$, $p^2-4q<0$.

Scanned with CamScanner

1) Pour le calcul de a), on utilise la formule

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (1)$$

où $Q_{n-1}(x)$ est un polynôme de degré $n-1$, à coefficients indéterminés et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour la détermination des coefficients du polynôme Q_{n-1} et λ on dérive les deux membres de (1) et on multiplie par $\sqrt{ax^2+bx+c}$, puis ensuite, on utilise la méthode des coefficients indéterminés.

Exples : Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$$

$P_n(x) = 2x^2-3x \Rightarrow n=2$

$Q_{n-1}(x) = Q_1(x) = ax+b$

En utilisant la formule (1) on a :

$$\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx = (ax+b)\sqrt{x^2-2x+5} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

En dérivant les deux membres on obtient

$$\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}} = a\sqrt{x^2-2x+5} + (ax+b)\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

En multipliant par $\sqrt{x^2-2x+5}$, on a

$$2x^2-3x = a(x^2-2x+5) + (ax+b)(x-1) + \lambda$$

$$\Rightarrow 2x^2-3x = 2ax^2 + (b-3a)x + 5a - b + \lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = 2a \\ -3 = b-3a \\ 0 = 5a-b+\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ \lambda = -5 \end{cases}$$

D'où

$$I = x\sqrt{x^2-2x+5} - 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+4}}$$

$$= \ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2+4}\right| + C_1$$

Scanned with CamScanner

D'où

$$\boxed{I = x\sqrt{x^2-2x+5} - 5\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right| + C}$$

2) Pour le calcul de b), on pose $x-a = \frac{1}{t}$ et on se ramène à l'intégrale de type a).

Exple : Calculer l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+x+1}}, \quad x>1$$

Posons $t = \frac{1}{x-1}$, $t>0$

$\Rightarrow x = 1+\frac{1}{t}$ et $dt = -\frac{1}{(x-1)^2}dx$

D'où

$$I = -\int \frac{dt}{\sqrt{(1+\frac{1}{t})^2+2+\frac{1}{t}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t}+3}}$$

$$= -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{3t^2+3t+1}} = -\frac{1}{6}\int \frac{6t+3-3}{\sqrt{3t^2+3t+1}}dt$$

$$= -\frac{1}{6}\int \frac{6t+3}{\sqrt{3t^2+3t+1}}dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{3t^2+3t+1}}$$

$$= -\frac{1}{6}\int \frac{d(3t^2+3t+1)}{\sqrt{3t^2+3t+1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+\frac{1}{3}}}$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{3}\sqrt{3t^2+3t+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{12}}}$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{3t^2+3t+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{3}}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}(x-1)}\right| + C$$

Scanned with CamScanner

3) Pour le calcul de c), c-à-d

$$I = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \quad p^2-4q<0$$

(*) Si $ax^2+bx+c = a(x^2+px+q)$, alors

$$I = \int \frac{(M_1x+N_1)\,dx}{(x^2+px+q)^{m+\frac{1}{2}}}$$

On a:

$$M_1x+N_1 = \frac{M_1}{2}(2x+p) + N_1 - \frac{M_1p}{2} = C_1(2x+p)+B_1$$

$$\Rightarrow I = C_1 \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^{m+\frac{1}{2}}} + B_1 \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m+\frac{1}{2}}}$$

Pour le calcul de

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m+\frac{1}{2}}}$$

On utilise la substitution d'Abel

$$t = \left(\sqrt{x^2+px+q}\right)' = \frac{2x+p}{2\sqrt{x^2+px+q}},$$

(*) En général, si

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^2+px+q} \neq \text{Const}, \text{ on pose}$$

$$x = \frac{\alpha t+\beta}{t+1}, \text{ si } p \neq \frac{b}{a}$$

On choisit α et β de sorte que dans les trinômes x^2+px+q et ax^2+bx+c qu'il y n'ait pas au dénominateur des termes en t.

Dans ce cas l'intégrale se ramène à la forme

$$\int \frac{At+B}{(t^2+\lambda)^m \sqrt{\lambda t^2+\mu}}\,dt = A \underbrace{\int \frac{t\,dt}{(t^2+\lambda)^m \sqrt{\lambda t^2+\mu}}}_{(*)} +$$

$$+ B \underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^m \sqrt{\lambda t^2+\mu}}}_{(**)} ; \lambda \neq 0$$

Scanned with CamScanner

Pour le calcul de λ, on pose

$$u = \sqrt{\lambda t^2 + \mu}$$

et pour le calcul de $(**)$, on pose

$$v = \left(\sqrt{\lambda t^2 + \mu}\right)' = \frac{\lambda t}{\sqrt{\lambda t^2 + \mu}}$$

* Si $p = \frac{b}{a}$ on pose $x = t - \frac{p}{2}$

Exples : Calculer les intégrales suivantes :

- $\int \frac{dx}{(x^2+x)^{3/2}} = \int \frac{dx}{(x^2+x)^{1+\frac{1}{2}}}$

Posons

$$t = \left(\sqrt{x^2+x}\right)' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{4x^2+4x+1}{4(x^2+x)}$$

$$\Rightarrow 4x^2+4x+1 = 4t^2(x^2+x) \Rightarrow$$

$$4(x^2+x)+1 = 4t^2(x^2+x)$$

$$\Rightarrow x^2+x = \frac{1}{4(t^2-1)}$$

D'autre part,

$$2x+1 = 2t\sqrt{x^2+x}$$

$$\Rightarrow t\sqrt{x^2+x} = x + \frac{1}{2}$$

En prenant la différentielle, on obtient

$$\sqrt{x^2+x}\,dt + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\,t\,dt = dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+x}\,dt + t^2\,dx = dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+x}\,dt = (1-t^2)\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}} = \frac{dt}{1-t^2}$$

D'où $\int \frac{dx}{(x^2+x)^{3/2}} = \int \frac{dx}{(x^2+x)\sqrt{x^2+x}} = \int \frac{4(t^2-1)}{1-t^2}\,dt = -4\int dt$

Scanned with CamScanner

$$= -4t + C = -4\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x}} + C}$$

2) $$I = \int \frac{x\,dx}{(2x^2+1)\sqrt{3x^2+5}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{(2x^2+1)\sqrt{3x^2+5}}$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{d(3x^2+5)}{(2x^2+1)\sqrt{3x^2+5}} = \frac{1}{3}\int \frac{d\sqrt{3x^2+5}}{2x^2+1}$$

Posons $t = \sqrt{3x^2+5} \Rightarrow t^2 = 3x^2+5$

$$\Rightarrow 2x^2 = \frac{3}{2}(t^2-5) \text{ et } 2x^2+1 = \frac{2}{3}(t^2-1)+1 = \frac{2t^2-7}{3}$$

D'où $$I = \int \frac{dt}{2t^2-7} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-7/2}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \ln\left|\frac{t-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}}{t+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}}\right| + C = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{7}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}t-\sqrt{7}}{\sqrt{2}t+\sqrt{7}}\right| + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2\sqrt{14}} \ln\left|\frac{\sqrt{6x^2+10}-\sqrt{7}}{\sqrt{6x^2+10}+\sqrt{7}}\right| + C$$

XII - Intégrales de la forme $\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$,

où F est une fonction rationnelle en x et

$\sqrt{ax^2+bx+c}$; $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $b^2-4ac \neq 0$.

On utilise les substitutions d'Euler

a) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$, si $a > 0$

b) $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$, si $c > 0$

c) $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$, si $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, c'-à-d si α est une racine réelle du trinôme ax^2+bx+c

Scanned with CamScanner

Exple : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$

Ici $a = 1 > 0$

Posons $\sqrt{x^2+2x+2} = t - x$

$\Rightarrow x^2+2x+2 = t^2 + x^2 - 2xt$

$\Rightarrow 2x + 2xt = t^2 - 2$

$\Rightarrow x = \frac{t^2-2}{2(1+t)}$ $\Rightarrow dx = \frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}\,dt$

$1+\sqrt{x^2+2x+2} = 1+t-\frac{t^2-2}{2(1+t)} = \frac{t^2+4t+4}{2(1+t)}$

D'où

$I = \int \frac{2(1+t)(t^2+2t+2)}{(t^2+4t+4)\,2(1+t)^2}\,dt = \int \frac{t^2+2t+2}{(1+t)(t+2)^2}\,dt$

$= \int \frac{dt}{t+1} - 2\int \frac{dt}{(t+2)^2} = \ln|t+1| + \frac{2}{t+2} + C$

2) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$

Ici $c = 1 > 0$

Posons $\sqrt{1+x-x^2} = tx - 1$

$\Rightarrow 1+x-x^2 = t^2x^2 - 2tx + 1$

$\Rightarrow (1+2t)x = (t^2+1)x^2 \Rightarrow x = \frac{1+2t}{t^2+1}$

$\Rightarrow dx = -2\frac{t^2+t-1}{(t^2+1)^2}\,dt$ $\Rightarrow 1+x = \frac{2t+1+t^2+1}{t^2+1}$

$= \frac{t^2+2t+2}{t^2+1}$ $\Rightarrow (1+x)\sqrt{1+x-x^2} = \frac{t^2+2t+2}{t^2+1}\left(t\frac{2t+1}{t^2+1} - 1\right)$

$= \frac{(t^2+2t+2)(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2}$

$\Rightarrow I = -2\int \frac{(t^2+1)^2}{(t^2+2t+2)(t^2+t-1)} \cdot \frac{t^2+t-1}{(t^2+1)^2}\,dt$

Scanned with CamScanner

$$= -2 \int \frac{dt}{t^2+2t+2} = -2 \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2+1}$$

$$\Rightarrow I = -2 \operatorname{arctg}(t+1) + C = -2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x} + 1\right) + C$$

3) $$\int \frac{x\,dx}{\left(\sqrt{7x-10-x^2}\right)^3}$$

Ici $a = -1 < 0$, $c = -10 < 0$ et $-x^2-10+7x = -x^2+7x-10$

$\Delta = 49-40 = 9$; $x_{1,2} = \frac{-7 \pm 3}{-2}$ $\Rightarrow x_1 = 2$ et $x_2 = 5$

Posons

$$\sqrt{7x-10-x^2} = \sqrt{(x-2)(5-x)} = (x-2)t$$

$$\Rightarrow 5-x = (x-2)t^2 \quad \Rightarrow x = \frac{5+2t^2}{1+t^2}$$

$$dx = -\frac{6t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$\sqrt{7x-10-x^2} = (x-2)t = \left(\frac{5+2t^2}{1+t^2} - 2\right)t$$

$$= \frac{3t}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{5+2t^2}{1+t^2} \cdot \frac{(1+t^2)^3}{27t^3} \left(\frac{-6t\,dt}{(1+t^2)^2}\right)$$

$$= \frac{-6}{27} \int \frac{5+2t^2}{t^2}\,dt = \frac{-2}{9} \int \left(\frac{5}{t^2} + 2\right) dt$$

$$= -\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{t} + 2t\right) + C$$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{9}\left(\frac{5-2t^2}{t}\right) + C \text{ avec } t = \frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}$$

Scanned with CamScanner

Chapitre III - Intégrales généralisées

A - Cas où l'intervalle d'intégration est non borné.

1) Définition

- Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$.
On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existe ou converge, si

$$\lim_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} f(x)\,dx \quad \text{existe (finie)}$$

On note

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} f(x)\,dx$$

Si cette limite n'existe pas, on dira que l'intégrale est divergente.

- On définit de façon analogue.

$$I = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\xi \to -\infty} \int_{\xi}^{a} f(x)\,dx$$

- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f \in C(\mathbb{R})$
On dit que l'intégrale généralisées

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ existe si } \lim_{\substack{\xi \to -\infty \\ \eta \to +\infty}} \int_{\xi}^{\eta} f(x)\,dx \text{ existe (finie)}$$

On note

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\xi \to -\infty \\ \eta \to +\infty}} \int_{\xi}^{\eta} f(x)\,dx$$

Remarque: L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ Converge} \iff I_1 = \lim_{\xi \to -\infty} \int_{\xi}^{a} f(x)\,dx$$

Scanned with CamScanner

et $I_2 = \lim_{\eta \to +\infty} \int_a^\eta f(x)dx$ existent (finies)

et dans ce cas $I = I_1 + I_2$

C-à-d

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

Exples: Etudier la convergence des intégrales suivantes:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = I$

Par déf, $I = \lim_{\xi \to +\infty} \int_0^\xi \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\xi \to +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^\xi =$

$= \lim_{\xi \to +\infty} \operatorname{arctg} \xi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I$ est convergente.

2) $I = \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx = \lim_{\xi \to -\infty} \int_\xi^0 x e^{-x^2} dx$

$= \frac{1}{2} \lim_{\xi \to -\infty} \int_\xi^0 e^{-x^2} dx^2 = -\frac{1}{2} \lim_{\xi \to -\infty} \int_\xi^0 d e^{-x^2}$

$= -\frac{1}{2} \lim_{\xi \to -\infty} e^{-x^2} \Big|_\xi^0 = -\frac{1}{2} + \lim_{\xi \to -\infty} e^{-\xi^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow I$ est cv.

3) $I = \int_0^{+\infty} \cos 2x\, dx = \lim_{\xi \to +\infty} \int_0^\xi \cos 2x\, dx = \lim_{\xi \to +\infty} \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^\xi =$

$= \lim_{\xi \to +\infty} \frac{\sin 2\xi}{2}$; cette limite n'existe pas

$\Rightarrow I$ est divergente.

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4x+9} = \lim_{\substack{\xi \to -\infty \\ \eta \to +\infty}} \int_\xi^\eta \frac{x\,dx}{x^2+4x+9}$

Scanned with CamScanner

$$= \lim_{\substack{\xi \to -\infty \\ \eta \to +\infty}} \int_{\xi}^{\eta} \frac{dx}{(x+2)^2+5} = \lim_{\substack{\xi \to -\infty \\ \eta \to +\infty}} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{5}} \Big|_{\xi}^{\eta}$$

$$= \lim_{\eta \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\eta+2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{\xi \to -\infty} \operatorname{arctg} \frac{\xi+2}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + \frac{\pi}{2\sqrt{5}} = \frac{\pi}{\sqrt{5}} \Rightarrow I \text{ est convergente.}$$

Exemple 2: Etudions la convergence de l'intégrale

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- si $\alpha = 1$, $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \to +\infty} \int_1^{\xi} \frac{dx}{x}$

$$= \lim_{\xi \to +\infty} \ln x \Big|_1^{\xi} = \lim_{\xi \to +\infty} \ln \xi = +\infty \Rightarrow I \text{ est divergente.}$$

- si $\alpha \neq 1$, $I = \lim_{\xi \to +\infty} \int_1^{\xi} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\xi \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(\xi^{1-\alpha} - 1 \right)$

- si $\alpha > 1$, $I = \frac{1}{\alpha - 1} \Rightarrow I$ est cv.
- si $\alpha < 1$, $I = +\infty \Rightarrow I$ est div.

En résumé

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ est cv si $\alpha > 1$

est div si $\alpha \leq 1$

Exercice: Montrer que l'intégrale:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{(x-c)^\alpha}, \quad a > c$$

est cv si $\alpha > 1$ et div si $\alpha \leq 1$

Scanned with CamScanner

B - Cas d'une fonction non bornée sur un intervalle borné

1) Définition

* Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ et non bornée quand $\xi \to b$.

On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente si

$$\lim_{\xi \to b^-} \int_a^{\xi} f(x)\,dx \text{ existe (finie)}$$

On note

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to b^-} \int_a^{\xi} f(x)\,dx$$

Dans le cas contraire on dit qu'elle est divergente.

* Si f est continue sur $]a,b]$ et non bornée quand $\xi \to a^+$ on définit de façon analogue

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to a^+} \int_{\xi}^b f(x)\,dx$$

* Si f est continue sur $]a,b[$, non bornée au voisinage de chaque extrémité, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si $\lim_{\substack{\xi \to a^+ \\ \eta \to b^-}} \int_{\xi}^{\eta} f(x)\,dx$ existe (finie)

On note

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\xi \to a^+ \\ \eta \to b^-}} \int_{\xi}^{\eta} f(x)\,dx$$

* Si f est définie sur $[a,b]$ sauf au point $c \in]a,b[$ et intégrable sur $[a,\xi]$ et $[\eta,b]$ $\forall \xi, \eta$ tels que $a \le \xi < c < \eta \le b$, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,dx$ se définit par $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to c^-} \int_a^{\xi} f(x)\,dx +$

$$+ \lim_{\eta \to c^+} \int_{\eta}^b f(x)\,dx.$$

Scanned with CamScanner

Si les deux limites existent (finies), alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente et on écrit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Exple 1 : Etudier la convergence de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

- Si $\alpha = 1$, $I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln x \Big|_\varepsilon^1$

$= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln \varepsilon = +\infty \Rightarrow I$ est div.

- Si $\alpha \neq 1 \Rightarrow I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \varepsilon^{1-\alpha}\right)$

- Si $\alpha > 1$, $I \to +\infty$

$\Rightarrow I$ est div

- Si $\alpha < 1$, $I = \frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow I$ est CV.

En résumé :

$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ CV si $\alpha < 1$

div si $\alpha \geq 1$

Exercice :

Soit $-\infty < a < b < +\infty$

Montrer que les intégrales :

$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ et $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ convergent si $\alpha < 1$

et divergent si $\alpha \geq 1$

Scanned with CamScanner

Exple 2 : Etudier la cv des intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = I$

Ici $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

On a $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ $\Rightarrow$ f est non bornée au $\mathcal{V}(1)$

d'où $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\xi \to 1^-} \int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \lim_{\xi \to 1^-} \arcsin \xi = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ I est convergente

2) $I = \int_0^1 \ln x \, dx$

Ici $f(x) = \ln x$

On a $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow \int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{\xi \to 0^+} \int_{\xi}^1 \ln x \, dx$

$= \lim_{\xi \to 0^+} (x \ln x - x) \Big|_{\xi}^1 = \lim_{\xi \to 0^+} (-1 - \xi \ln \xi + \xi) = -1$

$\Rightarrow$ I est cv.

3) $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$; avec $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ 1/\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

f est non bornée au $\mathcal{V}(0)$

Cette intégrale cv si chacune des intégrales

$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$ et $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge.

On a : $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \to 0^-} \ln|x| \Big|_{-1}^{\xi} = \lim_{\xi \to 0^-} \ln|\xi| = -\infty$

$\Rightarrow I$ est div.

Scanned with CamScanner

C) Propriétés et calcul des intégrales généralisées

Nous allons considérer les intégrales généralisées de la forme : $\int_a^b f(x)\,dx$

en supposant que.

a) f est définie pour $[a,b[$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, soit $b = +\infty$

b) $f \in \mathcal{R}[a,\xi]$ $\forall \xi \in [a,b[$

Par déf de l'intégrale généralisée

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to b^-} \int_a^\xi f(x)\,dx, \quad b \neq \infty$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\xi \to +\infty} \int_a^\xi f(x)\,dx, \quad b \neq +\infty$$

1) Linéarité : Si $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_a^b g(x)\,dx$ CV

alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx$ CV et on a :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

2) Formule de Newton - Leibnizt.

Si $f \in C([a,b[)$ et F est la primitive de f, alors

$\int_a^b f(x)\,dx$ Converge $\Leftrightarrow \lim_{\xi \to b^-} F(\xi) = F(b-0)$ existe (finie)

et $\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a)$.

Scanned with CamScanner

3- Intégration par parties

Théorème :

Soient u, v définies sur $[a,b[$, $u', v' \in C[a,b[$ $\forall \xi \in [a,b[$.

Si $\lim_{\xi \to b^-} [u(\xi)v(\xi)]$ existe et est finie et

$\int uv'dx$ converge, alors $\int uv'dx$ converge

et

$$\int_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b vu'dx$$

4 - Formule de changement de variable.

Théorème :

Si $f \in C[a,b[$, $x = \varphi(t) \in C^1([\alpha, \beta[)$ strictement croissante et vérifie les conditions :

$\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{t \to \beta^-} \varphi(t) = b$, alors,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

(A condition que l'une des intégrales converge).

5 - Intégration des inégalités

Si $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ CV

et $\forall x \in [a,b[$, $f(x) \leq g(x)$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

6 - Théorème

Si f est continue sur $[a,b[$, alors $\forall c \in]a,b[$, les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_c^b f(x)dx$ sont de même nature.

Remarque :

Scanned with CamScanner

- La somme des deux intégrales cv est cv.
- La somme d'une intégrale cv et d'une intégrale div est div.
- On ne peut rien conclure de la nature de la somme des deux intégrales divergentes.

D - Intégrales généralisées des fonctions positives.

Théorème 1 :

Si $\forall x \in [a,b[$, $f(x) \geq 0$, alors

$\int_a^b f(x)\,dx$ converge $\Leftrightarrow$ $\int_a^\xi f(x)\,dx$ est majorée $\forall \xi \in [a,b[$,

c'-à-d $\exists M : \forall \xi \in [a,b[$, $\int_a^\xi f(x)\,dx \leq M$.

Démonstration :

On remarque que $F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,dx$ est croissante

(car $F'(\xi) = f(x) \geq 0$)

$\Rightarrow$) Supposons que $\int_a^b f(x)dx$ converge

$\Rightarrow$ il existe $\lim_{\xi \to b^-} F(\xi) = \int_a^b f(x)dx = I$ (finie)

D'après le Théorème sur les limites des fonctions monotones,

$I = \sup_{a \leq \xi \leq b} F(\xi)$,

et d'après la définition de la borne supérieure

$\forall \xi \in [a,b[$,

$$\int_a^\xi f(x)\,dx \leq \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{M}$$

$\Rightarrow$) $\int_a^\xi f(x)\,dx$ est majorée

$\Leftarrow$) Soit $\exists M : \forall \xi \in [a,b[$.

$$\int_a^\xi f(x)\,dx \leq M.$$

Comme F est croissante, il existe (finie)

Scanned with CamScanner

$\lim_{\xi \to b^-} F(\xi) = F(b-a) = \sup_{a \le \xi \le b} F(\xi)$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ est convergente.

Théorème 2 : (Théorème de comparaison)

Si $\forall x \in [a,b[$.

$0 \le f(x) \le g(x)$, alors,

a) Si $\int_a^b g(x)dx$ CV $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ CV

b) Si $\int_a^b f(x)dx$ div $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ div

Démonstration :

a) $0 \le f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^\xi f(x)dx \le \int_a^\xi g(x)dx$ (*) $\forall \xi \in [a,b[$

Si $\int_a^\xi g(x)\,dx$ CV, c-à-d il existe (finie)

$\lim_{\xi \to b^-} \int_a^b g(x)dx$ CV d'après le théorème 1,

$\lim_{\xi \to b^-} \int_a^\xi g(x)\,dx = \sup_{a \le \xi \le b} \int_a^\xi g(x)\,dx$.

Alors de (*), on a :

$\forall \xi \in [a,b[$, $\int_a^\xi f(x)dx \le \sup_{a \le \xi \le b} \int_a^\xi g(x)\,dx = M$

et d'après le Théorème 1 :

$\int_a^b f(x)\,dx$ CV.

b) Si $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, alors $\int_a^b g(x)\,dx$ doit aussi diverger :

Dans le cas où $\int_a^b g(x)\,dx$ CV, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ CV d'après a).

Exple : Etudier la CV de l'intégrale :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos^4 3x}{\sqrt[5]{1+x^6}}\,dx$$

Scanned with CamScanner

On a : $0 \leq \dfrac{\cos^4 3x}{\sqrt[5]{1+x^6}} \leq \dfrac{1}{x^{\frac{6}{5}}}$, alors comme

$\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{6/5}}$ cv ; $\alpha = \frac{6}{5} > 1$, d'après le Théorème 2

l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos^4 3x}{\sqrt[5]{1+x^6}} dx$ cv

Corollaire :

Si $\forall x \in [a,b[$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ et il existe (finie) $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$ alors,

1) Si $\int_a^b g(x)dx$ cv et $0 \leq k < +\infty$, alors

$\int_a^b f(x)dx$ cv.

2) Si $\int_a^b g(x)dx$ div et $0 < k < +\infty$, alors

$\int_a^b f(x)dx$ div.

En particulier, si

$\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, c'-à-d $f \sim g$ quand $x \to b^-$

Alors $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature.

Remarque :

En utilisant le critère de comparaison par l'étude de la nature des intégrales, on commence le plus souvent à comparer les fonctions qui sont sous l'intégrale avec les fonctions :

$\dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$, $\dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$ et $\dfrac{1}{x^\alpha}$

Exples : Etudier la cv des intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^1 \dfrac{x^3 dx}{\sqrt[4]{1-x^2}}$

Scanned with CamScanner

On a $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ est non bornée au $\mathcal{V}(1)$

et $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[4]{1+x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$; on a :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{\sqrt[4]{1+x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

D'où $f(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$ or $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/4}}$ est CV

$\Rightarrow$ I est convergente.

2) $\displaystyle I = \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\ln x}$; $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, n'est pas bornée au $\mathcal{V}(1)$

$$\text{et } \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{\ln(1+x-1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x-1+\theta(x-1)} = 1$$

$\Rightarrow f(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$; D'autre part $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ est divergente.

$\Rightarrow \displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x-1}$ div et par conséquent $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\ln x}$ div.

3) $\displaystyle J = \int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$; On a : $f(x) = \dfrac{1}{1-x^3}$ non bornée au $\mathcal{V}(1)$

Posons $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{1-x^3} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}$$

or $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = -\int_0^1 \frac{dx}{-1+x}$ est div $\Rightarrow$ J div aussi.

Scanned with CamScanner

E- Critère de convergence de Cauchy

$I = \int_a^b f(x)\,dx$ CV $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon \in]a,b[:$

$\forall \xi', \xi'' \in]\delta_\varepsilon, b[, \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$

Demonstration

Posons $F(\xi) = \int_a^{\xi} f(x)\,dx$; $\xi \in [a,b[$

$\Rightarrow$) Supposons $\int_a^x f(x)\,dx$ CV

$\Rightarrow \exists$ (finie), $\lim_{\xi \to b^-} F(\xi)$ et d'après le critère de Cauchy pour les limites des fonctions, on a :

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \tilde{\delta}_\varepsilon \in]a,b[;$

$\forall \xi', \xi'' \in]\tilde{\delta}_\varepsilon, b[$

$\Rightarrow |F(\xi'') - F(\xi')| < \varepsilon$ or $F(\xi'') - F(\xi') = \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)\,dx$

Donc il suffit de prendre $\tilde{\delta}_\varepsilon = \delta_\varepsilon$.

Remarque :

Si le critère de Cauchy n'est pas vérifié, c-à-d

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall\, \delta_\varepsilon\ ]a,b[,$

$\exists\, \xi'_\delta, \xi''_{\delta_\varepsilon} \in]\delta, b[;$

$$\left| \int_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} f(x)\,dx \right| \geqslant \varepsilon_0, \text{ alors } \int_a^b f(x)\,dx \text{ CV.}$$

F- Convergence absolue et semi-convergence.

Définition 1 :

L'intégrale $I = \int_a^b f(x)\,dx$ est dite absolument convergente, si :

Scanned with CamScanner

$\int_a^b |f(x)|\,dx$ est cv.

Dans ce cas, on dit que f est absolument intégrable sur $[a,b[$.

Définition 2:

$\int_a^b f(x)\,dx$ est dite semi-convergente, si elle est convergente et $\int_a^b |f(x)|\,dx$ est div.

Théorème:

$\int_a^b |f(x)|\,dx$ cv $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ cv.

Remarque:

Si $\int_a^b f(x)\,dx$ est absolument convergente et $g \in \mathcal{R}[a,\eta]$.

$\forall \eta \in [a,b[$, g est bornée sur $[a,b[$, alors

$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ est aussi absolument cv.

Théorème:

Si $\int_a^b g(x)\,dx$ est absolument cv, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx$ sont de même nature.

G- Critère de Dirichlet et d'Abel.

__ Celle de Dirichlet

Théorème: Soient f et g définies sur $[a,+\infty[$ telles que

1) f est continue et admet une primitive bornée.

2) $g \in C^1$, g' est de signe constant et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ est cv.

Scanned with CamScanner

Démonstration : Montrons que $f\,g$ vérifie le critère de Cauchy sur $[a, +\infty[$.

$$\int_{\xi'}^{\xi''} f(x)g(x)\,dx = \int_{\xi'}^{\xi''} g(x)F'(x)\,dx = \int_{\xi'}^{\xi''} g(x)\,dF(x)$$

$$= g(x)F(x)\Big|_{\xi'}^{\xi''} - \int_{\xi'}^{\xi''} F(x)g'(x)\,dx$$

Comme F est bornée, on a :

$$\left|g(x)F(x)\Big|_{\xi'}^{\xi''}\right| = \left|g(\xi'')F(\xi'') - g(\xi')F(\xi'')\right| \leq$$

$$\leq M\left(|g(\xi')| + |g(\xi'')|\right) \text{ et}$$

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} F(x)\,g'(x)\,dx\right| \leq M\left|\int_{\xi'}^{\xi''} |g'(x)|\,dx\right|.$$

D'autre part

$$|g'(x)| = \begin{cases} g'(x), & g'(x) \geq 0 \\ -g'(x), & g'(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{\xi'}^{\xi''} |g'(x)|\,dx = \begin{cases} \int_{\xi'}^{\xi''} g'(x)\,dx = g(\xi'') - g(\xi') & \text{si } g'(x) \geq 0 \\ -\int_{\xi'}^{\xi''} g'(x)\,dx = g(\xi') - g(\xi'') & \text{si } g'(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\xi'}^{\xi''} |g'(x)|\,dx\right| = \left|g(\xi'') - g(\xi')\right| \leq |g(\xi')| + |g(\xi'')|.$$

Alors

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x)g(x)\,dx\right| = \left|F(x)g(x)\Big|_{\xi'}^{\xi''} - \int_{\xi'}^{\xi''} F(x)g'(x)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \left|F(x)g(x)\Big|_{\xi'}^{\xi''}\right| + M\left|\int_{\xi'}^{\xi''} |g'(x)|\,dx.\right|$$

Scanned with CamScanner

$$\leq M\left(|g(\xi')|+|g(\xi'')|\right)+M\left(|g(\xi')|+|g(\xi'')|\right)$$

$$= 2M\left(|g(\xi')|+|g(\xi'')|\right)$$

or $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta_\varepsilon > a :$

$$\forall x \in [\delta_\varepsilon, +\infty[\Rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

D'où pour $\xi', \xi'' \in [\delta_\varepsilon, +\infty[$,

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x)\,g(x)\,dx\right| \leq 2M\left(\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{4M}\right)=\varepsilon$$

$\Rightarrow fg$ vérifie le critère de Cauchy $\Rightarrow I$ est convergente.

Corollaire : (critère d'Abel).

Si

1) $f \in C[a, +\infty[$

2) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ CV

3) g est bornée sur $[a, +\infty[$

4) g est de signe constant sur $[a, +\infty[$,

alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ Converge.

Exple : Etudier la convergence des intégrales suivantes :

1) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha>0$

Posons $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha>0$

On a 1) f est continue et admet une primitive bornée

$F(x)=-\cos x$

Scanned with CamScanner

2) $g \in C^1([1,+\infty[)$

3) $g'(x) = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0$ sur $[1,+\infty[$

$\Rightarrow$ g' est de signe constant sur $[1,+\infty[$

4) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Alors d'après le critère de Dirichlet,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \text{ est convergente, } \alpha > 0$$

2) $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x}{x^\alpha} dx, \quad \alpha > 0$$

1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ CV (voir l'epp 1)

- $g(x) = \operatorname{arctg} x$ est bornée sur $[0,+\infty[$
- $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$

$\Rightarrow$ g' est de signe constant.

Alors d'après le critère d'Abel

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x}{x^\alpha} dx \text{ CV.}$$

Scanned with CamScanner

Chapitre : Equation différentielles.

I - Equation différentielles du 1er Ordre

1 - Généralités

Définition 1

Une équation différentielle du 1er ordre est une relation de la forme : $F(x, y, y') = 0$ où x est la variable, $y = y(x)$ la fonction inconnue, $F(x, y, y')$ une fonction donnée de la variable $x, y, y' = \frac{dy}{dx}$;

Dans les cas les plus simples, cette cette équation peut être resolue par rapport à la dérivée y' :

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y) \; ; \quad (1)$$

ou bien

$$dy - f(x, y)\,dx = 0 \; ;$$

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \, .$$

Définition 2 :

- Resoudre ou intégrer l'équation diff. (1), c'est trouver toutes les fonctions $y = \varphi(x)$ qui vérifient cette relation.
- Une telle fonction φ s'appelle solution ou intégrale de (1).
- La courbe représentative de φ s'appelle courbe intégrale.

Exple :

Soit l'équa - diff :

$$y' = \frac{-x}{y} \, .$$

La courbe de $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in]-1, 1[$ est une courbe intégrale.

Définition 3 :

On appelle solution générale de l'équa - diff (1) une solution $\varphi = \varphi(x, C)$, où C est une constante quelconque.

Scanned with CamScanner

* Dans le cas la solution générale est donnée sous la forme implicité ; c-à-d sous la forme :

$\Phi(x,y,c) = 0$ où $\Psi(x,y) = c$; on l'appelle intégrale générale.

Exple :

L'équation $y' = \frac{-x}{y}$ a pour intégrale générale $y^2 + x^2 = C$

Définition

Toute solution de l'équa-diff (1) qu'on obtient à partir de sa solution générale en donnant une valeur déterminée à la Constante est appelée solution particulière de cette équation.

Définition

Une solution singulière est une solution qui n'est pas obtenue en donnant une valeur déterminée à la constante.

Définition

La solution générale peut être donnée sous forme paramétrique :

$x = \varphi(t,c)$, $y = \psi(t,c)$

Exple :

La forme paramétrique de la solution de l'équation :

$y' = \frac{-x}{y}$ est $x = c\cos t$, $y = c\sin t$.

2 - Equa-diff ne contenant pas la fonction inconnue :

Soit l'équa-diff

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\Rightarrow dy = f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int dy = \int f(x)\,dx \quad \Rightarrow y = \int f(x)\,dx$$

Exple :

Resoudre l'équa-diff $y' = \frac{x}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow dy = \frac{x\,dx}{1+x^2} \Rightarrow \int dy = \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Scanned with CamScanner

3- Equa-diff à variables séparables.

Définition:

On appelle équa-diff du 1er ordre à variable séparables, une équa-diff de la forme

$$y' = f(x)\,g(y) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y) \quad \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx, \; g(y) \neq 0.$$

L'intégrale générale est de la forme:

$$\int \frac{dy}{g(y)} - \int f(x)\,dx = C, \; g(y) \neq 0.$$

Remarque:

Si $g(c_0) = 0$, alors la fonction $y = c_0$ est une solution de l'équation (1).

Théorème:

Soit f et g deux fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathcal{V}(x_0)$ et $\mathcal{V}(y_0)$ respectivement et $g(y_0) \neq 0$.

Alors la solution $y = \varphi(x)$ de l'équa (1) avec les conditions initiales $\varphi(x_0) = y_0$ existe, et unique sur $\mathcal{V}(x_0)$ et vérifie la relation

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Remarque:

L'équation de la forme $y' = f(ax+by+c)$ se ramène à une équation à variables séparables en posant $z = ax+by+c$

Exple:

Resoudre l'équa-diff suivantes:

1) $y' = xy^2 + 2xy$

$\Rightarrow y' = xy(y+2)$

$\Rightarrow dy = xy(y+2)dx$

Pour $y(y+2) \neq 0$; c-à-d $y \neq 0$ et $y \neq -2$,

Scanned with CamScanner

On a:

$$\frac{dy}{y(y+2)} = x\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y(y+2)} = \int x\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right) dy = \int x\,dx.$$

$$\Rightarrow \ln|y| - \ln|y+2| = x^2 + \ln c_1$$

$$\Rightarrow \frac{|y|}{|y+2|} = c_1 e^{x^2},\ c_1 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{y}{y+2} = c e^{x^2},\ c \in \mathbb{R}.$$

$y=0$ est une solution de l'équation obtenue pour $c=0$

$y=-2$ est une solution de l'équation obtenue pour $c=\infty$

La solution générale est:

$$\frac{y}{y+2} = c e^{x^2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{2c e^{x^2}}{1 - c e^{x^2}}$$

2) $y' = y\cos x$, $y(0) = 1$

$$\Rightarrow dy = y\cos x\,dx$$

$y \neq 0$, on a $\int \frac{dy}{y} = \int \cos x\,dx$

$$\Rightarrow \ln|y| = \sin x + c_1 \Rightarrow y = c e^{\sin x}$$

$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = c$

$\Rightarrow c = 1$ et $y = e^{\sin x}$

2e Méthode: En appliquant la formule du théorème, on obtient

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

Ici $y = \varphi(x)$, $\varphi(x_0) = y_0 = 1$; $x_0 = 0$

$f(x) = \cos x$; $g(y) = y$

$$\Rightarrow \int_0^x \cos t\,dt = \int_1^y \frac{dt}{t} \Rightarrow \sin t \Big|_0^x = \ln|t| \Big|_1^y \Rightarrow \ln y = \sin x$$

$$\Rightarrow y = e^{\sin x}.$$

Scanned with CamScanner

4- Equa-diff homogènes

Définition

Une fonction $F(x,y)$ est dite homogène d'ordre k, si $\forall \lambda > 0$, on a:

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k F(x,y)$$

* L'équation différentielle $y' = f(x,y)$ est dite homogène, si $f(x,y)$ est homogène d'ordre 0.
* L'équation différentielle $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ est dite homogène si M et N sont homogènes de même ordre.
* Les équa-diffs homogènes s'écrivent aussi sous la forme.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

En posant $y = tx$, on ramène une équation diff. homogène à une équation diff à variables séparables.

Exple:

Résoudre l'équation diff:

$$(x^2+xy+y^2)\,dx = x^2\,dy$$

Ici $M(x,y) = x^2+xy+y^2$ et $N(x,y) = x^2$

On a: $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 M(x,y)$

$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2$

M et N étant homogènes de même ordre, alors l'équation est homogène.

Posons $y = tx$.

$\Rightarrow dy = t\,dx + x\,dt$

En remplaçant dans l'équation on obtient:

$$(x^2+tx^2+t^2x^2)\,dx = x^2(t\,dx+x\,dt)$$

$$x \neq 0 \Rightarrow (1+t+t^2)\,dx = t\,dx + x\,dt$$

$$\Rightarrow (1+t^2)\,dx = x\,dt.$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dt}{1+t^2}$$

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow \operatorname{arctg} t = \ln|x| + \ln|c|$.

$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln|cx|$.

$\Rightarrow e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} = cx$.

Remarque:

On peut résoudre certaines équations homogènes en posant $y = z^m$, où m est en général l'inconnue.

Ensuite, pour résoudre l'équation, on pose $y = x^m u(x)$

Exple:

Soit l'équa-diff:

$x(2xy+1)y' + y = 0$

Cette équation n'est pas homogène, pour la rendre homogène,

posons $y = z^m$

$\Rightarrow y' = m z' z^{m-1}$

$\Rightarrow x(2x z^m + 1) m z' z^{m-1} + z^m = 0$

$\Rightarrow 2mx^2 z' z^{m-1} \cdot z^m + mx z' z^{m-1} + z^m = 0$

$\Rightarrow 2 + m - 1 + m = 1 + m - 1 = m$

$\Rightarrow 2m + 1 = m \Rightarrow m = -1$

Pour résoudre cette équation on pose:

$y = x^{-1} u(x) = \frac{u(x)}{x}$, $x \neq 0$.

5. Equa-diff linéaires du 1er ordre.

Définition:

- L'équa-diff de la forme $y' + P(x)y = \varphi(x)$ (1) est appelée linéaire
- L'équation $y' + P(x)y = 0$ est appelée équation homogène associée à (1).

Pour résoudre une équation diff linéaire du 1er ordre, on utilise la méthode de variation de la constante suivante:

On considère l'équation homogène associée:

$y' + P(x)y = 0$

Sa solution est:

$$y = ce^{-\int P(x)dx}$$

Scanned with CamScanner

Car on a: $\frac{y'}{y} = -P(x)$

$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)\,dx$

$\Rightarrow \ln|y| = -\int P(x)\,dx + \ln c$

$\Rightarrow y = c e^{-\int P(x)dx}$

En suite, on pose

$$y = c(x)\, e^{-\int P(x)dx} \quad , (2)$$

la solution générale de l'équation (1)

En portant (2) dans (1), on obtient $c'(x)e^{-\int P(x)dx} - c(x)P(x)$

$$e^{-\int P(x)dx} + c(x)\,P(x)\,e^{-\int P(x)dx} = \varphi(x).$$

$\Rightarrow c'(x) = \varphi(x)\, e^{\int P(x)dx}$

$\Rightarrow c(x) = c + \int \varphi(x) e^{\int P(x)dx}$; où c est une constante.

En posant $c(x)$ dans (2), on obtient la solution générale de (1).

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[c + \int \varphi(x)\, e^{\int P(x)dx}\right]$$

Remarque:

Toute solution $y(x)$ de l'équation diff linéaire (1) avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$ s'écrit sous la forme:

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(\tau)\, e^{\int_{x_0}^{\tau} P(t)dt}\, d\tau\right]$$

Exple:

Resoudre l'équa-diff

$y' + y\cos x = e^{-\sin x}$

Considerons l'équation homogène associée

$y' + y\cos x = 0$

$\Rightarrow y = c e^{-\int \cos x dx} \Rightarrow y = c e^{-\sin x}$

Posons $y(x) = c(x)\, e^{-\sin x}$ la solution générale de l'équation

Scanned with CamScanner

En portant $y(x)$ dans l'équation on obtient

$$c'(x)e^{-\sin x} - \cos x\, c(x)e^{-\sin x} + c(x)e^{-\sin x}\cos x = e^{-\sin x}$$

$$\Rightarrow c'(x) = 1$$

$$\Rightarrow c(x) = x + \mathbb{C}$$

d'où

$$y(x) = (x + c)e^{-\sin x}$$

Scanned with CamScanner