T.D : série n°1

Exercice n°1

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$|U_{n+2} - U_{n+1}| \leq q|U_{n+1} - U_n| \quad \text{avec} \quad 0 < q < 1$$

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
2. En déduire qu'elle est convergente.

Exercice n°2

1. Soit la suite de terme général :

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \geq 1) \quad \text{et} \quad S_n = U_1 + \cdots + U_n$$

Exprimer S_n en fonction de n et calculer sa limite.

2. Soit la suite de terme général :

$$V_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

(a) Calculer V_1 , V_2 , V_3

(b) Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

(c) En déduire que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice n°3

Donner l'expression de U_n en fonction de n :

1. $\begin{cases} U_0 = 1\,;\, U_1 = 2 \\ 2U_{n+2} - U_{n+1} - 3U_n = 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} U_0 = 0\,;\, U_1 = 2 \\ 2U_{n+2} - 2U_{n+1} - U_n = 0 \end{cases}$

Exercice n°4

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 &= 0 \\ U_{n+1} &= \sqrt{2 - U_n} \end{cases}$$

1. Montrer que cette suite est ~~oscillante~~ positive
2. Montrer que $\forall n \geq 2$ on a :

$$0 \leq U_n \leq \sqrt{2} \quad \text{et} \quad |U_{n+1} - 1| \leq \frac{|U_n - 1|}{1 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

3. Montrer que la suite est convergente et $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$

Exercice n°5

On considère la suite suivante :

$$\begin{cases} U_0 &= 1 \\ U_n &= U_{n-1} + \dfrac{1 + U_{n-1}}{1 + 2U_{n-1}} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Est-elle majorée ?

Exercice n°6

Étudier la convergence de la série de terme général U_n dans les cas suivants :

1) $Un = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

2) $Un = \frac{n \sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n^3+1}}$

3) $Un = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$

4) $Un = (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$

5) $Un = \frac{\sin nα}{(\ln 10)^n}$

6) $U_n = \frac{2.5.8.\cdots.(3n-1)}{1.5.9.\cdots.(4n-3)}$

7) $U_n = \frac{(-1)^{n-1}}{6n-5}$

8) $U_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

9) $U_n = \frac{1}{n} + \ln\frac{n}{n+1}$

10) $U_n = \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$

Exercice n°6

1. Déterminer l'intervalle de convergence de la série entière de terme général $U_n(x)$ et étudier la convergence aux extrémités de cet intervalle dans les cas suivants :

1) $Un(x) = \frac{x^n}{n2^n}$

2) $Un = \frac{nx^n}{(n+1)2^n}$

6) $U_n = \frac{(-1)^{n-1}(x-5)^n}{n3^n}$

7) $U_n = \frac{(-1)^n(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$

2. En appliquant la différentiation et l'intégration terme à terme, trouver les sommes des séries :

$$S_1(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$S_2(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$$

Scanné avec CamScanner

Exercice n°7

Tracer et développer en série de Fourier dans l'intervalle $]-\pi\ ,\ \pi[$ les fonctions $2\pi-$périodiques suivantes :

$$f_1(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0<x\leq \pi/2 \\ \pi-x & \text{si } \pi/2<x<\pi \\ f(-x)=-f(x) & \end{cases} \qquad f_2(x)=\begin{cases} \cos x & \text{si } 0<x\leq \pi/2 \\ -\cos x & \text{si } \pi/2<x<\pi \\ f(-x)=f(x) & \end{cases}$$

Exercice n°8

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x-3}+x+1$
4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{\sqrt{x^2-1}}$
7. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$
8. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{x^2}$
10. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin x/2}{\pi-x}$

Exercice n°9

1. Calculer la dérivée de la fonction f dans les cas suivants :
   1. $f(x)=\ln(\sqrt{x}+1)$
   2. $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$
   3. $f(x)=\dfrac{1}{3}\text{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$
   4. $f(x)=\dfrac{\text{cth}^2 x}{\ln x}$
   5. $f(x)=\dfrac{1}{6(1-3\cos x)^2}$
   6. $f(x)=\dfrac{(1+x^2)\text{arctg}x-x}{2}$
   7. $f(x)=\sqrt{1+\arcsin x}$
   8. $f(x)=\text{argth}\dfrac{2x}{1+x^2}$
2. Former les équations de la tangente et de la normale à la courbe de f au point d'abscisse x_0 indiqué :
   1. $f(x)=x^3+2x^2-4x-3$; $x_0=-2$
   2. $f(x)=\sqrt{x}$; $x_0=4$
   3. $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$; $x_0=1$
   4. $f(x)=e^{1-x^2}$; $x_0=-1$

Exercice n°10

1. Monter que les fonctions suivantes sont équivalentes au voisinage de x_0 :
   (a) $f(x)=1-e^{-x}$; $g(x)=\sin x$; $x_0=0$
   (b) $f(x)=\text{tg}(x)-\sin x$; $g(x)=\dfrac{x^3}{2}$; $x_0=0$
2. On donne $g(x)=1-x\sin\dfrac{1}{x}$ $x\neq0$. Comment faut-il choisir la valeur de $g(0)$ pour que la fonction $g(x)$ soit continue en $x_0=0$?

Exercice n°11

Utiliser la règle de L'Hospital pour calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}$
2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-\cos x)\text{ctg}x$
4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+3x^2+2x-6}{x^3-x^2+2x-1}$
5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$
6. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$

Exercice n°12

1. Utiliser le théorème des accroissements finis(T.A.F) pour démontrer les inégalités suivantes pour $x>0$.
   (a) $1+x\leq e^x$
   (b) $\ln(1+x)\leq x$
   (c) $\dfrac{x}{1+x}\leq\arctan x\leq x$
2. Utiliser le T.A.F pour calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{m}}-(x+1)^{\frac{1}{m}}\right)\quad(m\geq2)$$

Exercice n°13

Soit la fonction :

$$f(x)=1-\sqrt[5]{x^4}\quad x\in[-1\ \ 1]$$

1. Vérifier que la dérivée de f ne s'annule en aucun point de l'intervalle $]-1\ \ 1[$
2. Expliquer pourquoi on ne peut appliquer le théorème de Rolle.

Scanné avec CamScanner

Corrigé devoir n°1

Analyse : (10 points)

Exercice n°1 *(5 points)*

Soit la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \dfrac{1}{2^{n+1}}} \end{cases}$$

1. $\forall n \geq 1 \quad U_{n+1} < U_n + \dfrac{1}{2^{n+1}}$ ***(1,5 point)*** : Notons que $\forall n \geq 1 \quad U_n \geq 1$, d'autre part

$$U_{n+1}^2 = U_n^2 + \frac{1}{2^{n+1}} < U_n^2 + \frac{1}{2^{n+1}}\left(2U_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \left(U_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2$$

2. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente***(2 points)*** : On déduit de l'inégalité précédente :

$$1 \leq U_n < U_{n+1} < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{1}{2^n} < 2$$

Donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente est $1 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} U_n \leq 2$. De l'équation $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \dfrac{1}{2^{n+1}}$, on déduit :

$$\forall n > 1 \quad U_n^2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{3/2}$$

3. La série de terme général $V_n = U_{n+1} - U_n$ est convergente***(1,5 point)*** : C'est une série à termes positifs.

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_n = (U_n - U_{n-1}) + (U_{n-1} - U_{n-2}) + \cdots + (U_3 - U_2) + (U_2 - U_1) = U_n - 1$$

la série est convergente est $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} V_k = \sqrt{3/2} - 1$

Exercice n°2 *(5 points)*

Soit la suite de Fibonacci :

$$\begin{cases} W_1 = W_2 = 1 \\ W_{n+2} = W_{n+1} + W_n \end{cases}$$

1. Démontrons par récurrence***(3 points)*** :

(a) $W_1 + W_2 + \cdots + W_n = W_{n+2} - 1$: $W_1 = 1$, $W_3 - 1 = 2 - 1 = 1$

$$(W_1 + W_2 + \cdots + W_n) + W_{n+1} = W_{n+2} - 1 + W_{n+1} = W_{n+3} - 1$$

(b) $W_1^2 + W_2^2 + \cdots + W_n^2 = W_n W_{n+1}$: $W_1^2 = 1$, $W_1 W_2 = 1$

$$(W_1^2 + W_2^2 + \cdots + W_n^2) + W_{n+1}^2 = W_n W_{n+1} + W_{n+1}^2 = W_{n+1}(W_n + W_{n+1}) = W_{n+1}W_{n+2}$$

(c) $W_{n+1}^2 = W_n W_{n+2} + (-1)^n$:

$$\begin{aligned} W_{n+2}^2 &= (W_n + W_{n+1})W_{n+2} \\ &= \underbrace{W_n W_{n+2}}_{\text{Hyp.: } W_{n+1}^2 - (-1)^n} + W_{n+1}W_{n+2} \\ &= W_{n+1}^2 + W_{n+1}W_{n+2} - (-1)^n \\ &= W_{n+1}(W_{n+1} + W_{n+2}) + (-1)^{n+1} \\ &= W_{n+1}W_{n+3} + (-1)^{n+1} \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

2. Démontrer que $W_n = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ ***(2 points)*** : Les racines du trinôme $x^2 - x - 1$ sont $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. En posant $W_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$ avec les valeurs initiales W_1 et W_2 on tire l'expression ci-dessus de W_n .

Algèbre : (10 points)

Exercice n°1 *(5 points)*

On considère le polynôme suivant : $P(X) = (1 + i\sqrt{3})X^2 + \left(\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)X - 1$

1. $P(X)$ admet une racine réelle***(2 points)*** : $x = 1/2$

$$P(X) = X^2 + \frac{3}{2}X - 1 + i\left(\sqrt{3}X^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}X\right) = (X - 1/2)(X + 2) + i\sqrt{3}X(X - 1/2)$$

2. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de $r(X) = \dfrac{4(X+2)}{P(X)\overline{P(X)}}$ ***(3 points)*** :

$$P(X)\overline{P(X)} = 4(X - 1/2)^2(X^2 + X + 1) \Rightarrow r(X) = \frac{X+2}{(X-1/2)^2(X^2+X+1)}$$

$$\frac{X+2}{(X-1/2)^2(X^2+X+1)} = \frac{a}{X-1/2} + \frac{b}{(X-1/2)^2} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

$$b = (X-1/2)^2 r(X)\Big|_{X=1/2} = \frac{10}{7} \quad ; \quad \lim_{X\to\infty} Xr(X) = a + c = 0$$

Soit j une racine de $X^2 + X + 1 = 0$

$$cj + d = (X^2 + X + 1)r(X)\Big|_{X=j} = \frac{j+2}{(j-1/2)^2} \Rightarrow c = 52/49 \ , \ d = 8/49$$

$$\boxed{\frac{X+2}{(X-1/2)^2(X^2+X+1)} = \frac{-52/49}{(X-1/2)} + \frac{10/7}{(X-1/2)^2} + \frac{52X/49 + 8/49}{(X^2+X+1)}}$$

Scanné avec CamScanner

Devoir n°1 : Algèbre-Analyse

Durée : *2 heures*

Le formulaire des fonctions trigonométriques est autorisé.

Analyse : (10 points)

Exercice n°1 *(5 points)*

Soit la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \dfrac{1}{2^{n+1}}} \end{cases}$$

1. Démontrer que $\forall n \geq 1 \quad U_{n+1} < U_n + \dfrac{1}{2^{n+1}}$
2. En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.
3. Démontrer que la série de terme général $V_n = U_{n+1} - U_n$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice n°2 *(5 points)*

Soit la suite de Fibonacci :

$$\begin{cases} W_1 = W_2 = 1 \\ W_{n+2} = W_{n+1} + W_n \end{cases}$$

1. Établir par récurrence les formules suivantes :
   a. $W_1 + W_2 + \cdots + W_n = W_{n+2} - 1$
   b. $W_1^2 + W_2^2 + \cdots + W_n^2 = W_n W_{n+1}$
   c. $W_{n+1}^2 = W_n W_{n+2} + (-1)^n$
2. Démontrer que :

$$W_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Algèbre : (10 points)

Exercice n°1 *(5 points)*

On considère le polynôme suivant :

$$P(X) = (1 + i\sqrt{3})X^2 + \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)X - 1$$

et $\overline{P(X)}$ le conjugué complexe de $P(X)$.

1. Montrer que $P(X)$ admet une racine réelle.
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle : $r(X) = \dfrac{4(X+2)}{P(X)\overline{P(X)}}$

Exercice n°2 *(5 points)*

Soit la suite de polynôme P_n de $\mathbb{R}[X]$ définie par récurrence :

$$P_1 = 1 \quad ; \quad P_2 = X \quad ; \quad \forall n > 2 \quad P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$$

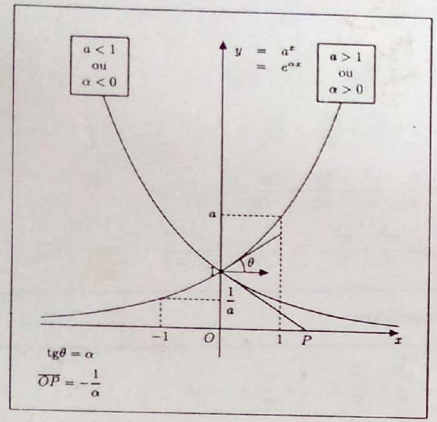
1. Déterminer P_3 et P_4
2. Établir $P_n^2 - P_{n-1}P_{n+1} = 1$
3. En déduire que P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux.
4. Vérifier ce résultat sur P_3 et P_4 en leur appliquant l'algorithme d'Euclide.
5. On pose $Q = 1 + (X-1)P_4$. Par la méthode de Hörner calculer : $P(X) = Q(X+2)$.

Scanné avec CamScanner

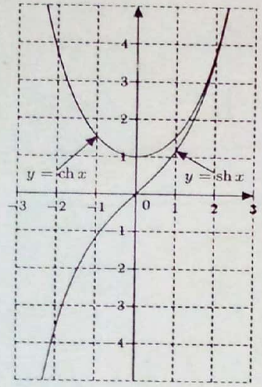
1.4 Exponentielles et lignes trigonométriques hyperboliques

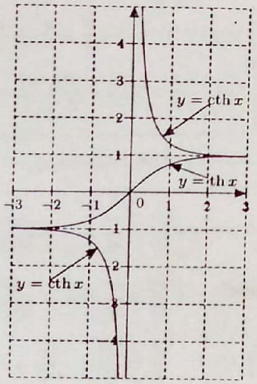
Transformation fondamentale

$$y = a^x = e^{\alpha x}, \quad \text{avec} \quad \alpha = \log a$$



Graphiques des fonctions hyperboliques





Fonctions hyperboliques

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad ; \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{et} \quad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Relations

$$\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x \quad ; \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \quad ; \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh}^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x$$

Formules d'addition

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a$$

Exponentielle complexe

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad ; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Lignes trigonométriques hyperboliques inverses

$$y = \operatorname{Arg sh}(x) \iff x = \operatorname{sh}(y) \quad ; \quad y = \operatorname{Arg th}(x) \iff x = \operatorname{th}(y)$$

$$y = \operatorname{Arg ch}(x) \iff \begin{cases} x = \operatorname{ch}(y) \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Arg sh}(x) = \operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2+1}) \quad ; \quad \operatorname{Arg th}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x}$$

$$\operatorname{Arg ch}(x) = \operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2-1}) \quad \text{Pour} \quad x \geq 1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arg sh}(x) + C \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Arg ch}(x) + C$$

Scanné avec CamScanner

1.5 Développements de Taylor et de Mac Laurin

Formules générales

Développements de Taylor : f étant indéfinement dérivables dans l'intervalle $a-x\ ,\ a+x$ et le reste R_n tendant vers 0 avec $1/n$:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\cdots$$

$$R_n=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\qquad \text{avec}\quad c\in(a-x\ ,\ a+x)$$

Développements de Mac Laurin : formules précédentes avec $a=0$

$(1+x)^n$ et applications essentielles

$$(1+x)^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1+(-x)}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots \qquad |x|<1$$

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}\cdots \qquad |x|<1$$

$$\sqrt{1-x}=(1+x)^{1/2}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}\cdots \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{a+bx}=\frac{1}{a(1+bx/a)}=\frac{1}{a}\left(1-\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{a^2}x^2-\frac{b^3}{a^3}x^3\cdots\right) \qquad |x|<\frac{a}{b}$$

Lignes trigonométriques

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \qquad \forall x$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \qquad \forall x$$

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots \qquad \forall x:$$

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\frac{x}{6}+\frac{7x^3}{360}+\frac{31x^5}{15120}+\frac{127x^7}{604800}+\cdots \qquad \forall x:$$

$$\frac{1}{\cos x}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\frac{61x^6}{720}+\frac{277x^8}{8064}+\cdots \qquad \forall x:$$

$$\operatorname{cotg} x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\frac{2x^5}{945}-\frac{x^7}{4725}+\cdots \qquad \forall x:$$

$$\operatorname{Arcsin} x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\cdots \qquad \forall |x|<1$$

$$\operatorname{Arccos} x=\frac{\pi}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{3x^5}{40}-\frac{5x^7}{112}-\cdots \qquad \forall |x|<1$$

$$\operatorname{Arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \qquad \forall x$$

Exponentielles et logarithmes

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad \forall x$$

$$a^x=1+x\operatorname{Log} a+\frac{(x\operatorname{Log} a)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x\operatorname{Log} a)^n}{n!}+\cdots \qquad \forall x$$

$$\operatorname{Log}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots \qquad \forall -1<x\leq 1$$

$$\operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right) \qquad \forall |x|<1$$

Lignes trigonométriques hyperboliques

$$\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \qquad \forall x$$

$$\operatorname{sh} x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \qquad \forall x$$

$$\operatorname{th} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{17x^7}{315}+\cdots \qquad \forall x:$$

Scanné avec CamScanner

Corrigé devoir n°1bis

Analyse : (10 points)

Exercice n°1 *(6 points)*

Soit la série de terme général : $U_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \quad \forall n > 0$

1. L'expression simplifiée : $U_n = \dfrac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ ***(2 points)***

$$S_n = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$\boxed{S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}} \quad \textit{(3 points)}$$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1$ ***(1 point)***

Exercice n°2 *(6 points)*

On considère la suite numérique :

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \quad (n \geq 1)$$

1. La suite $(W_n)_{n\geq 1}$ est décroissante : ***(2 points)***

$$\begin{aligned} W_n - W_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \end{aligned}$$

On a $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \Rightarrow W_n \leq W_{n-1}$

2. On pose : $V_1 = 1$ et $V_n = W_n - W_{n-1} \quad n \geq 2$

(a) Montrons que : $|V_n| \leq \dfrac{1}{n^{3/2}}$ ***(2 points)***

$$|W_n - W_{n-1}| = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{(n+\sqrt{n}\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

(b) La suite $(W_n)_{n\geq 1}$ est convergente : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |V_n| < +\infty$ donc la série de terme générale V_n est convergente et on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} V_k = 2 + W_n$ ***(2 points)***

Algèbre : (8 points)

Exercice n°1 *(3 points)*

Soit le polynôme : $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

1. Calcul de $Q(X) = P(X+1)$ en utilisant le schéma de Hörner :

1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	
1	2	3	4	5	$A_0 = 5$
	1	3	6		
1	3	6	10		$A_1 = 10$
	1	4			
1	4	10			$A_2 = 10$
	1				
1	5				$A_3 = 5$
1					$A_4 = 1$

Par suite on a : $Q(X) = P(X+1) = X^4 + 5X^3 + 10X^2 + 10X + 5$ ***(2 points)***

2. Le polynôme $E(X) = P(iX+1)$:

$$E(X) = Q(iX) = X^4 - 5iX^3 - 10X^2 + 10iX + 5 \quad \textit{(1 point)}$$

Exercice n°2 *(5 points)*

Simplifions et décomposons dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle : $r(X) = \dfrac{X^4 - X^2 + 1 - (X^2 - X + 1)^2}{(X^3 - X^2 + X - 1)^3}$

$$\begin{aligned} r(X) &= \frac{X^4 - X^2 + 1 - (X^4 - X^3 + X^2 - X^3 + X^2 - X + X^2 - X + 1)}{(X-1)^3(X^2+1)^3} \\ &= \frac{2X}{(X-1)(X^2+1)^3} \quad \textit{(2 points)} \\ &= \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+1} + \frac{dX+e}{(X^2+1)^2} + \frac{fX+g}{(X^2+1)^3} \end{aligned}$$

$$\boxed{r(X) = \frac{1}{4(X-1)} - \frac{X+1}{4(X^2+1)} - \frac{X+1}{2(X^2+1)^2} + \frac{1-X}{(X^2+1)^3}} \quad \textit{(3 points)}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice n°7

Tracer et développer en série de Fourier dans l'intervalle $]-\pi\ ,\ \pi[$ les fonctions $2\pi-$périodiques suivantes :

$$f_1(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0<x\leq \pi/2 \\ \pi-x & \text{si } \pi/2<x<\pi \\ f(-x)=-f(x) & \end{cases} \qquad f_2(x)=\begin{cases} \cos x & \text{si } 0<x\leq \pi/2 \\ -\cos x & \text{si } \pi/2<x<\pi \\ f(-x)=f(x) & \end{cases}$$

Exercice n°8

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x-3}+x+1$
4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{\sqrt{x^2-1}}$
7. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$
8. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{x^2}$
10. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin x/2}{\pi-x}$

Exercice n°9

1. Calculer la dérivée de la fonction f dans les cas suivants :
   1. $f(x)=\ln(\sqrt{x}+1)$
   2. $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$
   3. $f(x)=\dfrac{1}{3}\text{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$
   4. $f(x)=\dfrac{\text{cth}^2x}{\ln x}$
   5. $f(x)=\dfrac{1}{6(1-3\cos x)^2}$
   6. $f(x)=\dfrac{(1+x^2)\text{arctg}x-x}{2}$
   7. $f(x)=\sqrt{1+\arcsin x}$
   8. $f(x)=\text{argth}\dfrac{2x}{1+x^2}$
2. Former les équations de la tangente et de la normale à la courbe de f au point d'abscisse x_0 indiqué :
   1. $f(x)=x^3+2x^2-4x-3$; $x_0=-2$
   2. $f(x)=\sqrt{x}$; $x_0=4$
   3. $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$; $x_0=1$
   4. $f(x)=e^{1-x^2}$; $x_0=-1$

Exercice n°10

1. Monter que les fonctions suivantes sont équivalentes au voisinage de x_0 :
   (a) $f(x)=1-e^{-x}$; $g(x)=\sin x$; $x_0=0$
   (b) $f(x)=\text{tg}(x)-\sin x$; $g(x)=\dfrac{x^3}{2}$; $x_0=0$
2. On donne $g(x)=1-x\sin\dfrac{1}{x}$ $x\neq0$. Comment faut-il choisir la valeur de $g(0)$ pour que la fonction $g(x)$ soit continue en $x_0=0$?

Exercice n°11

Utiliser la règle de L'Hospital pour calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2x}{x^4}$
2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-\cos x)\text{ctg}x$
4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+3x^2+2x-6}{x^3-x^2+2x-1}$
5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$
6. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$

Exercice n°12

1. Utiliser le théorème des accroissements finis(T.A.F) pour démontrer les inégalités suivantes pour $x>0$.
   (a) $1+x\leq e^x$
   (b) $\ln(1+x)\leq x$
   (c) $\dfrac{x}{1+x^2}\leq\arctan x\leq x$
2. Utiliser le T.A.F pour calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{m}}-(x+1)^{\frac{1}{m}}\right)\quad(m\geq2)$$

Exercice n°13

Soit la fonction :

$$f(x)=1-\sqrt[3]{x^4}\quad x\in[-1\ \ 1]$$

1. Vérifier que la dérivée de f ne s'annule en aucun point de l'intervalle $]-1\ \ 1[$
2. Expliquer pourquoi on ne peut appliquer le théorème de Rolle.

Scanné avec CamScanner

T.D : série n°1

Exercice n°1

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$|U_{n+2} - U_{n+1}| \leq q|U_{n+1} - U_n| \quad \text{avec} \quad 0 < q < 1$$

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
2. En déduire qu'elle est convergente.

Exercice n°2

1. Soit la suite de terme général :

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)}, \ (n \geq 1) \quad \text{et} \quad S_n = U_1 + \cdots + U_n$$

Exprimer S_n en fonction de n et calculer sa limite.

2. Soit la suite de terme général :

$$V_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

(a) Calculer V_1 , V_2 , V_3

(b) Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

(c) En déduire que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice n°3

Donner l'expression de U_n en fonction de n :

1. $\begin{cases} U_0 = 1 \, ; \, U_1 = 2 \\ 2U_{n+2} - U_{n+1} - 3U_n = 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} U_0 = 0 \, ; \, U_1 = 2 \\ 2U_{n+2} - 2U_{n+1} - U_n = 0 \end{cases}$

Exercice n°4

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{2 - U_n} \end{cases}$$

1. Montrer que cette suite est oscillante croissante
2. Montrer que $\forall n \geq 2$ on a :

$$0 \leq U_n \leq \sqrt{2} \quad \text{et} \quad |U_{n+1} - 1| \leq \frac{|U_n - 1|}{1 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

3. Montrer que la suite est convergente et $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$

Exercice n°5

On considère la suite suivante :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_n = U_{n-1} + \dfrac{1 + U_{n-1}}{1 + 2U_{n-1}} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Est-elle majorée ?

Exercice n°6

Étudier la convergence de la série de terme général U_n dans les cas suivants :

1) $Un = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

2) $Un = \frac{n \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n^3+1}}$

3) $Un = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$

4) $Un = (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$

5) $Un = \frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}$

6) $U_n = \frac{2.5.8.\cdots.(3n-1)}{1.5.9.\cdots.(4n-3)}$

7) $U_n = \frac{(-1)^{n-1}}{6n-5}$

8) $U_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

9) $U_n = \frac{1}{n} + \ln \frac{n}{n+1}$

10) $U_n = \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$

Exercice n°6 7

1. Déterminer l'intervalle de convergence de la série entière de terme général $U_n(x)$ et étudier la convergence aux extrémités de cet intervalle dans les cas suivants :

1) $Un(x) = \frac{x^n}{n2^n}$

2) $Un = \frac{nx^n}{(n+1)2^n}$

6) $U_n = \frac{(-1)^{n-1}(x-5)^n}{n3^n}$

7) $U_n = \frac{(-1)^n(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$

2. En appliquant la différentiation et l'intégration terme à terme, trouver les sommes des séries :

$$S_1(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdot$$

$$S_2(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdot$$

Scanné avec CamScanner

Exercice n^o5

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(x) - \sin^2 x}{x^4}$
2. En déduire l'ordre et la partie principale de l'infiniment petit : $f(x) = x\sin x - \sin^2 x$ au voisinage de 0.

Remarque 0.1.

1. *Si x_0 est un point d'extremum de $f(x)$ alors $f'(x) = 0$ ou bien $f'(x)$ n'existe pas. D'une manière générale si la première dérivée non nulle au point x_0 est d'ordre k alors*
   (a) *Si k est pair :*
   x_0 est un point maximum si $f^{(k)}(x_0) < 0$ et un point minimum si $f^k(x_0) > 0$.
   (b) *Si k est impair : x_0 n'est pas un point d'extremum.*
2. *Un point x_0 est un point d'inflexion si la concavité de f passe des y positifs au y négatifs ou inversement. Alors $f''(x_0) = 0$ ou $f''(x_0)$ n'existe pas.*

Exercice n^o6

Déterminer les intervalles de concavités, les points extremums et les points d'inflexions des graphiques suivantes :

1. $f(x) = e^{-x}$
2. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$
4. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+8}}$
5. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+3}$
6. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$

Exercice n^o7

Trouver un équivalent simple au voisinage de 0 de f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \arccos\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$
2. $f(x) = \ln(\dfrac{1+\sin x}{\cos x}) - 2\sin x + x\cos x$
3. $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{3x}{3-2x^2}$
4. $f(x) = \ln(\dfrac{1+e^x}{2}) - \dfrac{4x+x^2}{8}$

Exercice n^o8

Calculer le DL de f au voisinage de 0 à l'ordre n indiqué :

1. $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$; $n = 6$
2. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$; $n = 4$
3. $f(x) = (1+\cos 2x)\sin x$; $n = 6$
4. $f(x) = e^{3x}\sin 2x$; $n = 5$
5. $f(x) = e^x \sin x$; $n = 6$
6. $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$

Scanné avec CamScanner

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par

$u_0 = 1$

$u_{n+1} = u_n - u_n^2$ pour $n \geq 1$

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, déduire la convergence

b) on pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$

a) Simplifier l'expression de S_n et montrer la suite de terme général u_n^2 est convergente.

b) la suite de terme général u_n est-elle convergente ? (justifier !)

3) Montrer que : $\forall n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq \frac{2}{n+1}$ (pas d'IDM ! Raisonner par récurrence !)

4) on pose $v_n = n u_n$

a) Montrer que la suite (v_n) est monotone et converge vers une limite non nulle.

b) Retrouver le résultat de la question 3.b

Exercice 2

On considère la suite numérique

$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ $(n \geq 1)$

1) Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

2) on pose $u_1 = 1$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$ $n \geq 2$

a) Montrer que : $|u_n| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$

b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente

Scanné avec CamScanner

Série d'exercices suites et séries numériques

Proposé par Yahou Moussa AMINOU

Exercice n°1 : Etude de la convergence

Etudier la convergence dans R, si elle existe, des suites définies par leur terme général :

1. $u_n = \frac{\sin n}{n}$; 2. $u_n = \frac{n}{n+1}$; 3. $u_n = (-1)^n$

4. $u_n = \frac{2^n - a^n}{2^n - 3^n}$; 5. $u_n = \frac{n+1}{n^2+3}$; ×6 $u_n = \frac{a^n + b^n}{a^n - b^n}$; $0 < a < b$

7. $u_n = \frac{e^{-n}\cos n}{n+1}$; ×8. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$; ×9. $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$, $n > 0$

10. $u_n = \sqrt{1 - 3n + n^2}$, $n > 2$

Exercice n°2 : Relation de comparaison

1. Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$, $v_n \leq 1$ et $\lim_{n \to +\infty} (v_n u_n) = 1$.

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

2. Etudier les suites suivantes :

a) $u_n = \sum_{k=1}^{2n} \left(2 - \frac{k}{2n}\right)$; b) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2}$

3. On considère deux suites à termes strictement positifs (a_n) et (b_n) qui convergent vers 0. Etudier la suite de terme général $u_n = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}$

Exercice n°3 : Approximation

1. Montrer que $\forall x > 0$; $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

2. En déduire la limite de la suite de terme général

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

IOM 5
TS, TC

Scanné avec CamScanner

Exercice N°4 suites

1. Etudier la suite de terme général :

$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$

2. Soit (u_n) la suite de terme général :

$u_n = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)$ avec $0 < a < 1$

a) Etudier la variation de cette suite.

b) Prouver l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x \leq e^x$

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente

Exercice N°5 Moyenne de Cesàro

Soit (u_n) une suite croissante de limite l. $\forall n \geq 1$, on pose $v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$

1. Montrer que (v_n) est croissante

2. Montrer que (v_n) est majorée et en déduire qu'elle est convergente vers une réel L.

3. Etablir que $\forall n \geq 1$, $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$

4. En déduire que $l = L$.

Exercice n°6 suites adjacentes

Montrer que les suites de terme général $u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$ sont adjacentes.

Exercice n°7 suites extraites

Etudier la suite de terme général :

$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

Scanné avec CamScanner

Série N°2 suites et séries numériques

Exercice N°1

1. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = e^{-n}$
   a) Justifier que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; 0 < U_n \leq 1$
2. Etudier le signe de la fonction $h(t) = 1 - \ln(t)$.
3. Calculer la dérivée de la fonction $g(t)$ définie ~~par~~ sur $]0, +\infty[$ par: $g(t) = t(2 - \ln t)$
4. Déduire de la question précédente une primitive H de la fonction h qui s'annule en $t = e^2$.
5. On considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$V_n = \int_{e^{-(n+1)}}^{e^{-n}} (1 - \ln t)\,dt$$

   a) Justifier que; $\forall n \in \mathbb{N}$, on a: $V_n \geq 0$
   b) Déduire de la question 4. l'expression de V_n en fonction de n.
   c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.
6. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose: $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$
   a) Donner l'expression de S_n en fonction de n
   b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Scanné avec CamScanner

Exercice N°2

soient $\sum U_n$ une série divergente et $\sum V_n$ une série convergente.

1) Quelle est la nature de la série $\sum (V_n + U_n)$?

2) Etudier la série de terme général $W_n = \dfrac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{1+n}$

Exercice N°3

Soit la série de terme général :

$$U_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} \qquad \forall n > 0$$

1) Simplifier l'expression de U_n et calculer S_n

2) En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$.

Scanné avec CamScanner

0.5 Principales règles d'intégrations

Si $F'(x) = f(x)$ alors : $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ (C est une constante arbitraire).

En particulier,

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \qquad (a \neq 0)$$

Table d'intégrales types

I.	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
II.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
III.	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{Arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\text{Arcctg}\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$
IV.	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C \quad (a \neq 0)$
V.	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C \quad (a \neq 0)$
VI.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+a}\right\rvert + C \quad (a \neq 0)$
VII.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{Arcsin}\frac{x}{a} + C = -\text{Arccos}\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$
VIII.	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln x} + C \quad (a > 0)\,; \int e^x dx = e^x + C$
IX.	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
X.	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$

Table d'intégrales types suite

XI.	$\int \text{tg}\,x\,dx = -\text{Log}\lvert\cos x\rvert + C$
XII.	$\int \text{ctg}\,x\,dx = \text{Log}\lvert\sin x\rvert + C$
XIII.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}\,x + C$
XIV.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg}\,x + C$
XV.	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \text{tg}\frac{x}{2}\right\rvert + C = \ln\lvert \text{cosec}\,x - \text{ctg}\,x\rvert + C$
XVI.	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert \text{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C = \ln\lvert \text{tg}\,x + \sec x\rvert + C$
XVII.	$\int \text{sh}\,x\,dx = \text{ch}\,x + C$
XVIII.	$\int \text{ch}\,x\,dx = \text{sh}\,x + C$
XIX.	$\int \frac{dx}{\text{ch}^2 x} = \text{th}\,x + C$
XX.	$\int \frac{dx}{\text{sh}^2 x} = -\text{cth}\,x + C$

Scanné avec CamScanner

Analyse : **T.D : série n°1**

Exercice n°1

1. Calculer la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

1. $U_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$	3. $U_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
2. $U_n = \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$	4. $U_n = \dfrac{\sin n}{n}$

2. Montrer par récurrence l'égalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$; *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right)$

Exercice n°2

Donner l'expression de U_n en fonction de n :

1. $\begin{cases} U_0 = 1\,;\ U_1 = 2 \\ 2U_{n+2} - U_{n+1} - 3U_n = 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} U_0 = 0\,;\ U_1 = 2 \\ 2U_{n+2} - 2U_{n+1} - U_n = 0 \end{cases}$

Exercice n°3

On considère la suite suivante :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_n = U_{n-1} + \dfrac{1+U_{n-1}}{1+2U_{n-1}} \qquad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Est-elle majorée ?

Exercice n°4

On considère la suite suivante :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{2}{U_n}\right) \qquad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer U_1 , U_2 , U_3
2. Montrer que $\forall n \geq 0$: $U_{n+1}^2 - 2 = \left(\dfrac{U_n^2-2}{2U_n}\right)^2$; $U_n - U_{n+1} = \dfrac{U_n^2-2}{2U_n}$
3. En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Scanné avec CamScanner

Exercice n°5

Soit la série de terme général : $U_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \quad \forall n > 0$

1. Simplifier l'expression de U_n et calculer S_n
2. En déduire : $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$

Exercice n°6

Soit la série de terme général : $U_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

1. Vérifier que $U_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$
2. Calculer $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice n°7

Étudier la convergence des séries suivantes :

1. $U_n = \dfrac{n^2+1}{n^2}$
2. $U_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$
3. $U_n = \dfrac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$
4. $U_n = ne^{1/n} - n$
5. $U_n = \dfrac{1}{n\cos^2 n}$
6. $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
7. $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$
8. $\dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$

Exercice n°8

1. Déterminer la nature de la série suivante :

$$U_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \dfrac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Soit $(V_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes positifs. On pose $W_n = \dfrac{V_n}{1+V_n}$. Monter que $\sum V_n$ et $\sum W_n$ sont de même nature.

Scanné avec CamScanner

Scanné avec CamScanner

Corrigé devoir n°1

Analyse : (10 points)

Exercice n°1 *(5 points)*

Considérons la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1+2U_n}{3+2U_n} \end{cases}$$

1. Montrons que $\forall n \geq 0 \quad , \quad 0 \leq U_n \leq 1/2$ ***(1,5 point)*** :
   Notons que si $0 \leq U_n$ alors $0 \leq U_{n+1}$, puisque $U_0 = 0$ donc $\forall n \geq 0 \quad , \quad U_n \geq 0$.
   D'autre part on a : $U_{n+1} - 1/2 = \dfrac{U_n - 1/2}{3+2U_n}$. En raisonnant comme précédemment on déduit : $\forall n \geq 0 \quad , \quad 0 \leq U_n \leq 1/2$.
2. Montrons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante***(2 points)*** :
   $$U_{n+1} - U_n = \frac{2(1/2 - U_n)(U_n+1)}{3+2U_n} \geq 0 \quad \text{de la première partie}$$
3. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente***(1,5 point)*** :
   En effet, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et bornée donc convergente et sa limite est solution de $x = \dfrac{1+2x}{3+2x}$ et $0 \leq x \leq 1/2$. On trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1/2$.

Exercice n°2 *(5 points)*

1. Coefficients de Fourier de $f(x) = x^2$, sur $[-\pi\ ,\ \pi]$ (2π-périodique)***(1,5 point)*** :
   La fonction est paire donc $\forall n \geq 1 \quad b_n = 0$ et $\forall n \geq 1$
   $$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = (-1)^n \frac{4}{n^2} \quad , \quad \text{(Intégration par parties)} \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{2\pi^2}{3}$$
2. $\forall -\pi \leq x \leq \pi$: $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} - 4\left[\dfrac{\cos x}{1^2} - \dfrac{\cos 2x}{2^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{\cos nx}{n^2} + \cdots\right]$ ***(2 point)***.
   En effet f est continue sur l'intervalle $[-\pi\ ,\ \pi]$ on a $\forall\ -\pi \leq x \leq \pi$:
   $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx\, dx = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx$$
3. On en déduit les sommes des séries suivantes***(1,5 point)*** : $(\cos n\pi = (-1)^n)$

   Pour $x = \pi$, $S_1 = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$

   Pour $x = 0$, $S_2 = \dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{12}$

   et $(S_1 + S_2)/2 = S_3 = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{8}$

Algèbre : (10 points)

Exercice n°1 *(4 points)*

1. $Q(X) = X^{3p} + X^{3q+1} + X^{3r+2}$ est divisible par $X^2 + X + 1$ ***(1,5 point)*** :
   $X^2 = -(X+1) \Rightarrow X^3 = -X^2 - X = -(-X-1) - X = 1 \Rightarrow Q(X) = 1 + X + X^2 = 0$
2. $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. $P(iX+1)$ par la méthode de Hörner***(2,5 points)*** :
   Posons $Y = iX$. Alors
   $$P(iX+1) = P(Y+1) = A_4Y^4 + A_3Y^3 + A_2Y^2 + A_1Y + A_0$$

1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	
1	2	3	4	5	$A_0 = 5$
	1	3	6		
1	3	6	10		$A_1 = 10$
	1	4			
1	4	10			$A_2 = 10$
	1				
1	5				$A_3 = 5$
1					$A_4 = 1$

   Par suite on a : $P(Y+1) = Y^4 + 5Y^3 + 10Y^2 + 10Y + 5$ en revenant à l'indéterminée X :
   $$P(iX+1) = X^4 - 5iX^3 - 10X^2 + 10iX + 5$$

Exercice n°2 *(6 points)*

On considère : $P_{n,a}(X) = \dfrac{X^6 + aX^4 + 1}{X^n(X^4+1)}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $N_{n,a}(X) = X^6 + aX^4 + 1$.

1. Démontrons que la fraction rationnelle $P_{n,a}(X)$ est irréductible***(1 point)*** :
   $N_{n,a}(0) \neq 0$, et $X^4 = -1 \Rightarrow N_{n,a}(X) = -X^2 - a + 1 \neq 0$ sinon on aurait $(1-a)^2 = X^4 = -1$
2. Ses pôles et leurs ordres***(1 point)*** : Le pôle 0 a l'ordre n, les autres sont simples.
   $$x_0 = 0\ ,\ x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\ ,\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-i-1)\ ,\ x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)\ ,\ x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$
3. La partie polaire relative au pôle 0 : $Q_{n,a}(X) = \dfrac{A_{n-1}}{X^n} + \dfrac{A_{n-2}}{X^{n-1}} + \cdots + \dfrac{A_1}{X^2} + \dfrac{A_0}{X}$
   (a) Division de $X^6 + aX^4 + 1$ par $X^4 + 1$ suivant les puissances croissantes de X, à l'ordre 7 ***(1 point)*** :
   $$1 + aX^4 + X^6 = (1+X^4)[1 + (a-1)X^4 + X^6] + X^8(1 - a - X2)$$

(b) On déduit $Q_{n,a}(X)$ pour $1 \leq n \leq 8$ ***(1,5 point)*** :

$$\begin{array}{lll|lll} Q_{1,a}(X) & = & \dfrac{1}{X} & Q_{5,a}(X) & = & \dfrac{1}{X^5}+\dfrac{a-1}{X} \\ Q_{2,a}(X) & = & \dfrac{1}{X^2} & Q_{6,a}(X) & = & \dfrac{1}{X^6}+\dfrac{a-1}{X^2} \\ Q_{3,a}(X) & = & \dfrac{1}{X^3} & Q_{7,a}(X) & = & \dfrac{1}{X^7}+\dfrac{a-1}{X^3}+\dfrac{1}{X} \\ Q_{4,a}(X) & = & \dfrac{1}{X^4} & Q_{8,a}(X) & = & \dfrac{1}{X^8}+\dfrac{a-1}{X^4}+\dfrac{1}{X^2} \end{array}$$

4. Décomposons en éléments simples de $\mathbb{C}(X)$ la fraction $P_{7,1}(X)$ ***(1,5 point)*** :

$$P_{7,1}(X)=\frac{1}{X^7}+\frac{1}{X}+\sum_{i=1}^{4}\frac{A_i}{X-x_i} \quad \text{avec} \quad A_i=\frac{x_i^6+x_i^4+1}{x_i^7\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}=\frac{1}{x_i\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}$$

Notons y_i le pôle différent de x_i et $-x_i$ alors on a :

$$X^4+1=(X^2-x_i^2)(X^2-y_i^2)=X^4-(x_i^2+y_i^2)X^2+x_i^2y_i^2 \Rightarrow x_i^2+y_i^2=0 \quad \text{et} \quad x_i^2y_i^2=1$$

On en déduit : $A_i=x_i(x_i+x_i)(x_i-y_i)(x_i+y_i)=2(x_i^4-x_i^2y_i^2)=-4$

$$P_{7,1}(X)=\frac{1}{X^7}+\frac{1}{X}-4\left(\frac{1}{X-x_1}+\frac{1}{X-x_2}+\frac{1}{X-x_3}+\frac{1}{X-x_4}\right)$$

Scanné avec CamScanner

Exercice n°2 *(5 points)*

Soit la suite de polynôme P_n de $\mathbb{R}[X]$ définie par récurrence :

$$P_1 = 1 \quad ; \quad P_2 = X \quad ; \quad \forall n > 2 \quad P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$$

1. P_3 et P_4 ***(0,5 point)*** :

$$P_3 = XP_2 - P_1 = X^2 - 1 \quad \text{et} \quad P_4 = XP_3 - P_2 = X^3 - 2X$$

2. $P_n^2 - P_{n-1}P_{n+1} = 1$ ***(1,5 point)*** :

$$P_{n+1} = XP_n - P_{n-1} \quad ; \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

$$P_{n+1}^2 - P_nP_{n+2} = P_{n+1}(XP_n - P_{n-1}) - P_n(XP_{n+1} - P_n) = P_n^2 - P_{n-1}P_{n+1}$$

donc $P_n^2 - P_{n-1}P_{n+1} = P_2^2 - P_1P_3 = X^2 - (X^2 - 1) = 1$

3. P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux ***(1 point)*** :
Car tout diviseur commun de P_n et P_{n+1} divise 1, donc doit être égale à 1.

4. Vérifions ce résultat sur P_3 et P_4 en leur appliquant l'algorithme d'Euclide ***(1 point)*** :

$$\begin{array}{rcll} P_4 & = & XP_3 + R_1 & (= -X) \\ P_3 & = & -XR_1/3 + R_2 & (= -1) \end{array} \qquad \text{PGDC}(P_3, P_1) = 1$$

5. On pose $Q = 1 + (X-1)P_4$. Par la méthode de Hörner calculons, $P(X) = Q(X+2)$ ***(1 point)*** :

$$Q(X) = X^4 - X^3 - 2X^2 + 2X + 1$$

1	−1	−2	2	1	2
	2	2	0	4	
1	1	0	2	5	$A_0 = 5$
	2	6	12		
1	3	6	14		$A_1 = 14$
	2	10			
1	5	16			$A_2 = 16$
	2				
1	7				$A_3 = 7$
1					$A_4 = 1$

Par suite on a : $P(X) = Q(X+2) = X^4 + 7X^3 + 16X^2 + 14X + 5$

Scanné avec CamScanner

2.8 Séries alternées

Une série est dite alternée si ses termes sont alternativement positifs et négatifs. Le terme générale d'une série alternée est de la forme $U_n = (-1)^n V_n$ (ou $(-1)^{n+1} V_n$) où V_n est une suite à termes positifs.

2.8.1 Critère de convergence

Pour qu'une série alternée de terme général $U_n = (-1)^n V_n$ converge il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites.

i. La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

ii. $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$.

Exercice 2.4.

Étudier la convergence de la série alternée de terme général, U_n dans les cas suivants :

1. $U_n = (-1)^n \frac{1}{n}$
2. $U_n = (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$

2.9 Transformation et règle d'Abel

2.9.1 Transformation d'Abel

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques posons :

$$U_n = a_n b_n \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

Alors $\forall n, p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=1}^{p} U_{n+k} = \sum_{k=1}^{p} (a_{n+k} - a_{n+k+1}) B_{n+k} - a_{n+1} B_n + a_{n+p+1} B_{n+p}$$

Cette égalité est appelée transformation d'Abel[3].

2.9.2 Règle d'Abel

Pour que la série de terme général $U_n = a_n b_n$ converge il suffit que les trois conditions suivantes soient satisfaites.

i. La suite $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ est bornée.

ii. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

iii. La série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ est convergente.

Exercice 2.5.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que : $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

1. *Montrer que la série $\sum |a_n - a_{n+1}|$ est convergente*
2. *En déduire que la règle d'Abel reste vraie si la condition iii.) est remplacée par :*
   iv.) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Abel(Niels) :1802-1829 mathématicien norvégien.

2.9.3 application aux séries trigonométriques

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique Soit $(a_n)_n$ à termes positifs

i. Si la série $\sum a_n$ est convergente, alors la série $\sum a_n e^{int}$ est absolument convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$

ii. Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 alors la série $\sum a_n e^{int}$ est convergente pour tout $t \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$

Exercice 2.6.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, montrer que :

1. $\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1}$
2. *En déduire :* $|\sum_{k=0}^{n} e^{ikt}| \leq \frac{2}{|e^{it} - 1|} = \frac{1}{|\sin t/2|}$
3. *Démontrer les propositions i.) et ii.) ci-dessus sur les séries trigonométriques.*

Exercice 2.7. *Produit de deux séries*

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes positifs, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}$$

1. *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n \leq A_n B_n \leq c_{2n} \quad \text{avec} \quad A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \; ; \; B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

2. *En déduire que la série $\sum c_n$ est convergente et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

N.B: 2.2.

La série $\sum c_n$ définie ci-dessus est appelée la série produit des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$, qu'il ne faut pas confondre avec la série $\sum a_n b_n$.

On montre que la série produit de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.

Scanné avec CamScanner

2.4 Séries absolument convergentes

Une série de terme général U_n est dite absolument convergente si la série de terme général $|U_n|$ est convergente. Une série absolument convergente est convergente, en effet on a :

$$|S_q - S_p| \leq \sum_{n=p}^{q} |U_n| \quad \text{(critère de Cauchy)}$$

La réciproque est fausse :
Examiner la série de terme général $U_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

Remarque 2.2. *Quelques critères de convergence.*

- Pour qu'une série à termes positifs soit convergente il faut et il suffit que les termes S_n soient majorés.
- Soit $\sum U_n$ et $\sum V_n$ deux séries à termes positifs telles que :

  $$U_n \leq V_n \quad \text{(à partir d'un certain rang)}$$

  Si la série de terme général U_n (respectivement : V_n) est *divergente* (respectivement : *convergente*) alors la série de terme général V_n (respectivement : U_n) est *divergente* (respectivement : *convergente*).
- Soit $\sum U_n$ une série et $\sum V_n$ une série à termes positifs convergente telle que :

  $$|U_n| \leq V_n \quad \text{(à partir d'un certain rang)}$$

  Alors la série $\sum U_n$ est absolument convergente.

2.5 Théorème et règle de Cauchy

Théorème 2.1. *(de Cauchy)*
Soit $\sum U_n$ *une série à termes positifs, si à partir d'un certain rang on a :*

i. $\sqrt[n]{U_n} \leq q < 1$ *alors la série* $\sum U_n$ *est convergente.*

ii. $\sqrt[n]{U_n} \geq 1$ *alors la série* $\sum U_n$ *est divergente.*

En effet dans le cas *i.)* la série est comparée à la série géométrique de terme général q^n. $(0 < q < 1)$ et dans le cas *ii.)* le terme général U_n de la série ne tend pas vers 0.

2.5.1 Règle de Cauchy

Soit $\sum U_n$ une série à termes positifs telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{U_n} = l \quad \text{alors la série } \sum U_n \text{ est :}$$

- convergente dans le cas $l < 1$
- divergente dans le cas $l > 1$

(Dans le cas $l = 1$ on ne peut rien dire.)

Exercice 2.2.

Étudier la convergence de la série de terme général U_n *dans les cas suivants ;*

1. $U_n = \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$
2. $U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

2.6 Théorème et règle de D'Alembert

Théorème 2.2. *(de D'Alembert)*[2]
Soit $\sum U_n$ *une série à termes positifs, si à partir d'un certain rang on a :*

i. $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq q < 1$ *alors la série* $\sum U_n$ *est convergente.*

ii. $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$ *alors la série* $\sum U_n$ *est divergente.*

Dans le premier cas on compare avec la série géométrique et dans le second cas on note que le terme général est une suite croissante et ne peut tendre vers 0

2.6.1 Règle de D'Alembert

Soit $\sum U_n$ une série à termes positifs telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l \quad \text{alors la série } \sum U_n \text{ est :}$$

- convergente dans le cas $l < 1$
- divergente dans le cas $l > 1$

(Dans le cas $l = 1$ on ne peut rien dire.)

Exercice 2.3.

Utiliser la règle de D'Alembert pour étudier la convergence de la série de terme général :

$$U_n = \frac{2n-1}{2^n}$$

2.7 Comparaison d'une série avec une intégrale

Soit la série de terme général $U_n = f(n)$ où f est une fonction positive, décroissante et continue en tout point $x \geq 1$ alors la série $\sum U_n$ et l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

ont même nature (converge ou diverge simultanément).

Exemple 2.1.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *et de même nature que l'intégrale :*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Ainsi la série de Riemann converge pour $\alpha > 1$ *(diverge pour* $\alpha \leq 1$ *).*

2. Alembert(Jean Le Rond D') : 1717 – 1783 mathématicien et philosophe français.

Scanné avec CamScanner

Chapitre 2

Séries numériques

Définition 2.1.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, on appelle série numérique de terme général U_n la suite dont le terme général est :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$$

Si $\forall n \in \mathbb{N}\quad U_n \geq 0$ on dit que la série est à termes positifs. Nous noterons $\sum U_n$ la série de terme général U_n.

2.1 Convergence et divergence

Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite S on dit que la série, $\sum U_n$ est convergente et a pour somme S et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n = S$$

sinon on dit que la série $\sum U_n$ est divergente.

Remarque 2.1. *Condition nécessaire de convergence*

Si une série est convergente son terme général U_n tend vers 0, en effet on a :

$$U_n = S_n - S_{n-1} \quad \forall n \geq 1 \quad (S_n \text{ et } S_{n-1} \text{ ont même limite})$$

Cette condition n'est pas suffisante :
Examiner la série de terme général $U_n = \ln(1+\frac{1}{n})\quad n \in \mathbb{N}^*$.

2.2 Quelques exemples

2.2.1 Série géométrique

Posons $U_n = q^n$ la série $\sum U_n$ est la série géométrique de raison q, on a :

$$S_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{si } q \neq 1$$

$S_n = U_0 \dfrac{1-q^{n+1-k}}{1-q}$

La série $\sum U_n$ est convergente si $|q| < 1$ et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

(Elle est divergente pour $|q| \geq 1$.).

2.2.2 série harmonique

Posons $U_n = \frac{1}{n}\quad n \in \mathbb{N}$.
$\sum U_n$ est la série harmonique, elle est divergente.(voir exercice 1.3(3.))

2.2.3 Série de Riemann

On appelle série de Riemann[1] la série de terme général :

$$U_n = \frac{1}{n^\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

La série harmonique est une série de Riemann ($\alpha = 1$.)
La série de Riemann converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leq 1$. (voir exemple 2.1), ainsi par exemple la série :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

est convergente, on montre que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 2.1.

Soit la série de terme général $U_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$

1. *Montrer que :*

$$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

2. *En déduire :* $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

N.B: 2.1.

1. *Si les séries de terme général U_n et V_n sont convergentes il en est de même des séries de terme général $U_n + V_n$ et αU_n $(\alpha \in \mathbb{R})$*
2. *En supprimant un nombre fini de termes d'une série on ne change pas sa nature(convergente ou divergente).*

2.3 Critère de convergence de Cauchy

Une condition nécessaire et suffisante pour que la série de terme général U_n converge est :

$$\forall q > p \quad \lim_{p\to+\infty} |U_{p+1} + \cdots + U_q| = 0$$

En effet cette condition entraine que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

1. Riemann(Bernhard) : 1826 – 1866 mathématicien français.

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Scanné avec CamScanner

- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ l'équation (E) admet deux racines complexes conjuguées : $x_1 = \bar{x}_2 = \rho e^{i\theta}$ on a alors :

$$U_n = \rho^n(\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta)) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U_0 &= \lambda_1 \\ U_1 &= \rho(\lambda_1 \cos\theta + \lambda_2 \sin\theta) \end{cases}$$

- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ l'équation (E) admet une racine réelle double : $x_1 = x_2 = r_0 = -\frac{b}{2a}$ on a alors :

$$U_n = r_0^n(\lambda_1 + n\lambda_2) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U_0 &= \lambda_1 \\ U_1 &= r_0(\lambda_1 + \lambda_2) \end{cases}$$

Exercice 1.6.

Déterminer le terme général de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

$$\begin{cases} U_0 = 1\ ;\ U_1 = -1 \\ U_{n+2} - 2U_{n+1} + 2U_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} U_0 = 1\ ;\ U_1 = 2 \\ U_{n+2} + U_{n+1} - U_n = 0 \end{cases}$$

Suite récurrente

Une suite récurrente est une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par son premier terme U_0 et une relation de récurrence de la forme : $U_{n+1} = f(U_n)$ où f est une fonction numerique

- *Monotonie*
  Si f est croissante la suite est monotone, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante(respectivement : décroissante) si $U_0 \leq U_1$ (respectivement : $U_1 \leq U_0$).
  Si f est décroissante la suite est oscillante, autrement dit $U_{n+1} - U_n$ est alternativement positif est négatif.
- *Convergence*
  Supposons la fonction f continue sur un ensemble D contenant les termes de la suite, alors si la suite est convergente sa limite est solution de l'équation : $f(x) = x$.

Remarque 1.8.

Dans le cas où la fonction f est décroissante, posons $g = fof$ et considérons les suites suivantes :

$$V_n = U_{2n} \quad ; \quad W_n = U_{2n+1} \quad \text{alors on a :} \quad V_{n+1} = g(V_n) \quad \text{et} \quad W_{n+1} = g(W_n)$$

ces deux suites sont monotones et ont des sens de variations contraires.

Exercice 1.7.

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 &= 3 \\ U_{n+1} &= \sqrt{2 + U_n} \end{cases}$$

1. *Montrer que cette suite est décroissante et minorée.*
2. *En déduire qu'elle est convergente et trouver sa limite.*

Suites adjacentes

Deux suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si :

i) $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n - U_n) = 0$

- *convergence :*
  Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et ont même limite.

Remarque 1.9.

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes on a : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad U_n \leq V_p$.

Exercice 1.8.

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 &= \sqrt{2} \\ U_{n+1} &= \sqrt{2 - U_n} \end{cases}$$

Montrer que les suites $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$ sont deux suites adjacentes et

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = 1.$$

Scanné avec CamScanner

Critères de convergence

- *Théorème des trois suites*
  Soient trois suites de termes généraux U_n ; V_n ; W_n telles que $V_n \leq U_n \leq W_n$ pour tout n. supposons les suites de termes généraux V_n et W_n convergentes et de même limite l. Alors la suite de terme général U_n est aussi convergente et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.
- *Suite monotone bornée*
  Toute suite croissante majorée(respectivement : décroissante minorée) est convergente.
- *Suite de Cauchy*[1]
  La suite de terme général U_n est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n, m \geq n_0 \quad |U_n - U_m| \leq \varepsilon$$

La suite de terme général U_n est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

Exercice 1.3.

1. *Exprimer analytiquement qu'une suite de terme général U_n n'est pas une suite de Cauchy.*
2. *Soit la suite de terme général $U_n = \frac{n}{1+n2^n}$*
   (a) Montrer que : $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2^n}$
   (b) En déduire que cette suite est convergente.
3. *Soit la suite de terme général :*

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}. \qquad (n \geq 1)$$

   (a) Montrer que : $\forall n > 0 \quad U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$
   (b) En déduire que la suite est divergente.

Remarque 1.6. *Calcul direct de la limite d'une suite*

Si le terme général d'une suite est de la forme $U_n = f(n)$ où f est une fonction numérique, la limite de la suite est celle de la fonction f à $+\infty$. Elle est obtenue par les règles usuelles de calcul de limites, en tenant compte des formes indéterminées et des conventions suivantes :

- *Formes indéterminées :*

$$\infty - \infty \;;\; 0 \times \infty \;;\; \frac{\infty}{\infty} \;;\; \frac{0}{0} \;;\; 1^\infty \;;\; 0^0 \;;\; \infty^0$$

- *Les conventions :*

i. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \frac{a}{\infty} = 0$
ii. $\forall a \in \mathbb{R}^* \, \forall b \in \mathbb{R} \quad b + a \times \infty = signe(a)\infty$
iii. $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad ab \neq 0 \quad a \times \infty \times b \times \infty = signe(ab)\infty$
iv $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$
v. $\forall a \in \mathbb{R}^* \quad \frac{a}{0^\pm} = \pm signe(a)\infty$

1. Cauchy Augustin Louis : 1789 – 1857 mathématicien français.

1.3.4 Suites remarquables

Suites arithmétiques

Une suite arithmétique est une suite de terme général U_n déterminé par le premier terme U_0 et la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = U_n + r \quad r \text{ est une constante appelée } \textit{la raison} \text{ de la suite}$$

On a alors :

$$\boxed{U_n = U_0 + nr \quad (\forall n \in \mathbb{N})}$$

Exercice 1.4.

Calculer en fonction de n, r, U_0 la somme :

$$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$$

Suites géométriques

Une suite géométrique est une suite de terme général U_n déterminé par le premier terme U_0 et la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = qU_n \quad q \text{ est une constante appelée } \textit{la raison} \text{ de la suite}$$

On a alors :

$$\boxed{U_n = U_0 q^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})}$$

Remarque 1.7.

- Pour une suite géométrique de terme général U_n on a :

$$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n = U_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (\forall q \neq 1)$$

- Une suite géométrique est convergente si $|q| < 1$ ou $q = 1$. Tandis qu'une suite arithmétique n'est convergente que si $r = 0$ (si elle est stationnaire).

Exercice 1.5.

Étudier la convergence de la suite de terme général $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ dans le cas d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique.

Suites arithmético-géométriques

Une telle suite est déterminée par les termes U_0, U_1 et la relation :

$$aU_{n+2} + bU_{n+1} + cU_n = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

On associe à cette suite l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (E)$$

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ l'équation (E) admet deux racines réelles x_1, x_2 on a alors :

$$U_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U_0 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ U_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

1.2.2 Majorant et minorant

Soit A une parie non vide de $\mathbb{R}$: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

un majorant(respectivement :minorant) de A est un réel M (respectivement : m) tel que :

$$\forall x \in A \; ; \; x \leq M \text{ (respectivement : } m \leq x).$$

On dit alors que A est majoré par M (respectivement : minoré par m). Une partie non vide de $\mathbb{R}$ à la fois majorée et minorée est dite *bornée*, dans ce cas :

$$\exists M \, , \; m \, / \, \forall x \in A \quad m \leq x \leq M$$

On parle de plus grand élément (respectivement : *plus petit élément*) si $M \in A$ (respectivement : $m \in A$).

1.2.3 Borne supérieure et borne inférieure

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- La *borne supérieure* de A notée : $\sup A$ est le plus petit des majorants de A :

$$(M \quad \text{majorant de } A) \Rightarrow \sup A \leq M.$$

- La *borne inférieure* de A notée : $\inf A$ est le plus grand des minorants de A :

$$(m \quad \text{minorant de } A) \Rightarrow m \leq \inf A.$$

Propriétés :

sup : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \, / \, \sup A - \varepsilon < x \leq \sup A$

inf : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \, / \, \inf A \leq x < \inf A + \varepsilon$

Nous admettons la proposition suivante :

Proposition 1.1. *Toute partie non vide de* $\mathbb{R}$ *majorée (respectivement : minorée) admet une borne supérieure (respectivement : une borne inférieure).*

1,2.4 Ouvert et fermé dans $\mathbb{R}$

- Un ensemble $O \subset \mathbb{R}$ est dit *ouvert* si c'est une réunion d'intervalles ouverts. Toute réunion d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert ; l'intersection de deux ensembles ouverts est un ensemble ouvert.
- Un ensemble $F \subset \mathbb{R}$ est dit fermé si son complémentaire, $\mathbb{R} - F$, est un ensemble ouvert. Toute intersection d'ensembles fermés est un ensemble fermé ; la réunion de deux ensembles fermés est un ensemble fermé.

Exercice 1.2.

1. *Vérifier que* $\mathbb{R}$ *est un ensemble ouvert.*
2. *Soient* A *et* B *deux parties bornées de* $\mathbb{R}$, *montrer que :*
   (a) *Si* $A \subset B$ *on a :* $\sup A \leq \sup B$ *et* $\inf B \leq \inf A$
   (b) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ *et* $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$
   (c) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \quad A + B \overset{def}{=} \{z = x + y, \; x \in A \, , \; y \in B\}$
   (d) $\max(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$

1.3 Suites numériques

Définition 1.1.

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$, *on note* $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *la suite de terme général* U_n. *On peut faire commencer l'ensemble des indices par* 1, *par* 2, *etc. En général si* $I \subset \mathbb{N}$ *est une partie de* $\mathbb{N}$ *alors* $(U_n)_{n \in I}$ *est une suite finie ou infinie selon que* I *est une partie finie ou infinie.*

1.3.1 Suite monotone

La suite de terme général U_n est croissante(respectivement : décroissante) si

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \leq U_{n+1} \text{ (respectivement : } U_{n+1} \leq U_n).$$

Une suite *monotone* est une suite croissante ou décroissante.

Exemple 1.2.

- La suite de terme général $U_n = (-1)^n$ n'est pas monotone.
- La suite de terme général $U_n = \frac{5n+1}{n+1}$ est croissante (vérifier le !)

1.3.2 Suite extraite d'une suite

Soit $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ des entiers strictement croissantes et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique, la suite de terme général $V_n = U_{k_n}$ est une suite numérique appelée suite extraite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1.3.3 Suites convergentes

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *convergente* s'il existe un réel l (limite de la suite) tel que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \, / \, \forall n \geq n_0 \quad |U_n - l| < \varepsilon$$

et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = l$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*.

Remarque 1.5.

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet la limite l si pour n assez grand le terme U_n est aussi proche que l'on veut de l.

Propriétés des suites convergentes

1. La limite d'une suite si elle existe est unique.
2. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente(*converge vers la même limite*).
3. Toute suite convergente est bornée.
4. si la suite de terme général U_n et la suite de terme général V_n convergent respectivement vers l et l' alors :

$$\lim_{n \to +\infty} (U_n + V_n) = l + l' \quad ; \quad lim_{n \to +\infty} U_n V_n = ll' \quad ; \quad \text{si } l \neq 0 \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{V_n}{U_n} = \frac{l'}{l}$$

Scanné avec CamScanner

Remarque 1.1.

$(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$ et $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ - *La contraposition.*
Si P est une assertion fausse alors $P \Rightarrow Q$ est une assertion vraie indépendamment de la valeur logique de Q. une assertion composée qui est vraie indépendamment des valeurs logiques des assertions qui la composent est appelée *tautologie.*

Exemple 1.1. *(de tautologie)*

- Le tiers-exclu : $P \vee \neg P$
- La non contradiction $\neg(P \wedge \neg P)$
- La transitivité de l'implication : $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Remarque 1.2.

Une théorie est non contradictoire si elle ne conduit à aucun théorème de la forme $(P \wedge \neg P)$.
Dans une théorie de non contradiction si P est un axiome alors $\neg P$ est un théorème.

Principe du raisonnement par l'absurde

Dans une théorie de non contradiction τ, étant donnée une assertion P, le principe du raisonnement par l'absurde consiste à considérer la théorie $\tau' = \tau \wedge P$, si cette théorie est contradictoire alors l'assertion P est fausse dans τ.

1.1.3 Prédicats

Un prédicats est un énoncé contenant une (ou plusieurs) variable qui conduit à une assertion quand la variable (ou les variables) prend une valeur dans un ensemble donné.
$f(x) =$ "x est un entier impair" est un prédicat à une variable. $f(3)$ est une assertion vraie et $f(2)$ est une assertion fausse.

1.1.4 Quantificateurs

Soit $f(x)$ un prédicat, l'assertion " $f(x)$ est vrai pour tout élément $x \in A$ " est notée $\forall x \in A\ ;\ f(x)$. On note $\exists x \in A\ ;\ f(x)$ l'assertion "Il existe au moins un élément x_0 de A tel que l'assertion $f(x_0)$ soit vraie". Les symboles $\forall$ et $\exists$ sont respectivement appelés quantificateur universel et quantificateur existentiel.

Exercice 1.1.

Trouver les équivalences tautologiques des assertions suivantes :

1. $\neg(\exists x \in A \quad f(x))$
2. $\neg(\forall x \in A \quad f(x))$
3. $\neg(\forall x \in A \quad f(x) \Rightarrow g(x))$

1.2 Quelques propriétés des nombres réels

Rappelons que l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}$ est composé des nombres rationnels($\mathbb{Q}$) et des nombres irrationnels($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$) :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \quad p\,,\, q \in \mathbb{Z}\,,\, q \neq 0 \right\}$$

Si $x \in \mathbb{R}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ on dit que x est un irrationnel, dans ce cas x admet un développement décimal non périodique illimité.

Remarque 1.3.

1. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$:

$$\forall x\,,\, y \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad x < y, \exists\, r \in \mathbb{Q} \,/\, x < r < y$$

(*Tout intervalle de* $\mathbb{R}$ *contient un rationnel.*)

2. L'ensemble $\mathbb{R}$ est archimédien :

$$\forall x\,,\, y \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \,/\, nx > y.$$

1.2.1 Relation d'ordre

une relation, $x \leq y$ dans $A \subset \mathbb{R}$ est dite une *relation d'ordre* si :

i. $x \leq x\, \forall x \in A$ (*Réflexive*)
ii. $(x \leq y)$ et $(y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$ (*Transitive*)
iii. $(x \leq y)$ et $(y \leq x) \Rightarrow (x = y)$ (*Antisymétrique*)

Remarque 1.4.

- Si $x \leq y$ et $x \neq y$ on écrit $x < y$ (ou $y > x$)
- Si $\forall x\,,\, y \in A$ on a : $x \leq y$ ou $y \leq x$ on dit que *l'ordre est total.* C'est le cas de $(\mathbb{R}, \leq)$. $\mathbb{R}$ est totalement ordonné par $\leq$ (la relation : *inférieure ou égale*) et même par $\geq$ (la relation :*supérieure ou égale*).
- Dans $\mathbb{R}$ on distinguera soigneusement les quatre sortes d'*intervalles* :
  i. l'intervalle *fermé* : $[a \quad b] = \{x \,/\, a \leq x \leq b\}$
  ii. l'intervalle *ouvert* : $]a \quad b[= \{x \,/\, a < x < b\}$
  iii. l'intervalle *semi-ouvert à droite* : $[a \quad b[= \{x \,/\, a \leq x < b\}$
  iv. l'intervalle *semi-ouvert à gauche* : $]a \quad b] = \{x \,/\, a < x \leq b\}$

  On note $[a \quad +\infty[= \{x \,/ a \leq x\}$ (respectivement : $]a \quad +\infty[= \{x \,/ a < x\}$), de façon analogue, on a les intervalles $]-\infty \quad a]$ et $]-\infty \quad a[$, ce sont des intervalles *illimités fermés*(respectivement : *ouverts*).

Scanné avec CamScanner

5.3 Équations différentielles du second ordre 68
5.3.1 Équation du second ordre se ramenant au premier 68
5.3.2 Équations différentielles linéaires du second ordre(EDLS) 69

Chapitre 1

Rappels

1.1 Opérations logiques élémentaires

1.1.1 Assertions

Une assertion est un énoncé ne contenant pas de variable susceptible de prendre l'une ou l'autre de deux valeurs logiques le vrai(V) ou le faux(F)

Axiome

Un axiome est une assertion admise comme étant vraie. Par exemple les axiomes de probabilité.

Théorème

Un théorème est un énoncé permettant de déduire des assertions vraies.

1.1.2 Connecteurs logiques

Soient P et Q deux assertions on peut construire les assertions suivantes :

$$\neg P\ ,\ P \wedge Q\ ,\ P \vee Q\ ,\ P \Rightarrow Q\ ,\ P \Leftrightarrow Q$$

ce qui se lit "non P " , " P et Q " , " P ou Q " , " P implique Q " , " P équivaut logiquement à Q ". Les symboles $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, sont appelés respectivement *connecteurs logiques* de *négation*, de *conjonction*, de *disjonction*, d'*implication* et d'*équivalence* logique.

Tables de vérité

P	$\neg P$
V	F
F	V

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Scanné avec CamScanner

Table des matières

1 Rappels 5
1.1 Opérations logiques élémentaires 5
1.1.1 Assertions 5
1.1.2 Connecteurs logiques 6
1.1.3 Prédicats 6
1.1.4 Quantificateurs 7
1.2 Quelques propriétés des nombres réels 7
1.2.1 Relation d'ordre 8
1.2.2 Majorant et minorant 8
1.2.3 Borne supérieure et borne inférieure 8
1.2.4 Ouvert et fermé dans $\mathbb{R}$ 9
1.3 Suites numériques 9
1.3.1 Suite monotone 9
1.3.2 Suite extraite d'une suite 9
1.3.3 Suites convergentes 11
1.3.4 Suites remarquables 14

2 Séries numériques 14
2.1 Convergence et divergence 14
2.2 Quelques exemples 14
2.2.1 Série géométrique 15
2.2.2 série harmonique 15
2.2.3 Série de Riemann 15
2.3 Critère de convergence de Cauchy 16
2.4 Séries absolument convergentes 16
2.5 Théorème et règle de Cauchy 16
2.5.1 Règle de Cauchy 17
2.6 Théorème et règle de D'Alembert 17
2.6.1 Règle de D'Alembert 17
2.7 Comparaison d'une série avec une intégrale 18
2.8 Séries alternées 18
2.8.1 Critère de convergence 18
2.9 Transformation et règle d'Abel 18
2.9.1 Transformation d'Abel 18
2.9.2 Règle d'Abel 19
2.9.3 application aux séries trigonométriques

3 Fonction d'une variable réelle : Calcul différentiel
3.1 Limites
3.1.1 Limite à gauche, limite à droite
3.1.2 Limite à l'infini
3.1.3 Limite infinie
3.2 Comparaison des fonctions
3.2.1 Fonctions équivalentes
3.2.2 Infiniment petit, infiniment grand
3.2.3 Notation de Landau
3.3 Continuité
3.3.1 Définition et propriétés
3.3.2 Fonctions continues sur un segment
3.3.3 Fonctions trigonométriques inverses
3.3.4 Fonctions hyperboliques directes et inverses
3.4 Fonctions dérivables
3.4.1 Définition et propriétés
3.4.2 Interprétation géométrique du nombre dérivée
3.4.3 Dérivées d'ordres supérieurs au premier
3.4.4 différentielle totale
3.4.5 Formules des accroissements finis
3.4.6 Convexité
3.4.7 Formule de Taylor
3.5 Développements limités(DL)
3.5.1 Opérations sur les DL
3.5.2 DL de la composée de deux fonctions.
3.5.3 Dérivation et intégration des DL
3.5.4 Généralisation des DL

4 Fonction d'une variable réelle : Calcul intégral
4.1 Calcul de primitives
4.1.1 Définition
4.1.2 Propriétés
4.1.3 Techniques d'intégration
4.2 Intégrale définie
4.2.1 Definition
4.2.2 Formule de Newton-Leibniz
4.2.3 Changement de variable dans une intégrale définie
4.2.4 Intégration par partie dans une intégrale définie
4.2.5 Théorème de la moyenne
4.2.6 Applications des intégrales définies

5 Équations différentielles
5.1 Définitions fondamentales
5.2 Équations différentielles du premier ordre.
5.2.1 Équations du premier ordre à variables séparables
5.2.2 Équations homogènes du premier ordre
5.2.3 Équations linéaires du premier ordre
5.2.4 Trajectoires orthogonales
5.2.5 Équations aux différentielles totales

Scanné avec CamScanner

1X S.Y.A.S

Objectif du cours

Acquérir les connaissances mathématiques élémentaires mais nécessaires pour pouvoir suivre les matières techniques programmées dans le cursus de formation

Contenu du cours

Partie I : 28 heures (CM = 20 heures, TD = 08 heures)

ALGEBRE
1- Nombres complexes - Trigonométrie
2- Polynômes et fractions rationnelles à une déterminée
3- Algèbre linéaire : application linéaire, matrices et déterminants

Partie II : 28 heures (CM = 20 heures, TD = 08 heures)

CALCUL VECTORIEL – ELEMENTS DE GEOMETRIE ANALYTIQUE
1- Vecteurs et scalaires – système de coordonnées
2- Eléments de géométrie euclidienne : droites et plans dans l'espace
3- Notion sur les courbes paramétrées

Partie III : 28 heures (CM = 20 heures, TD = 08 heures)

ANALYSE
1- Propriétés des nombres réels – Notion sur les séries numériques
2- Eléments de calcul différentiel et intégral (fonction d'une variable réelle)
3- Eléments d'équations différentielles ordinaires

Quelques références

ALGEBRE ET TRIGONOMETRIE, SWOKOWSKI, BELIN
GEOMETRIE ANALYTIQUE, KINDLE, MC GRAW-HILL
GEOMETRIE DESCRIPTIVE T.1 : COURS ET EXERCICES, COLLECTIF, GABAY
THEORIE ET PRATIQUE DU CALCUL MATRICIEL, F. ROTELLA, TECHNIP
ANALYSE T.2 CALCUL DIFFERENTIEL ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES, SCHWARTZ,
URENT, HERMANN

COURS DE MATHEMATIQUES
ANALYSE

M. SEYDOU

13 octobre 2017

Scanné avec CamScanner

Devoir n°1 : Analyse

Durée : *1 heure 30 minutes*

L'usage des téléphones portables(même comme calculatrices) n'est pas autorisé. Les formulaires des fonctions trigonométriques et hyperboliques réelles ainsi que la table des primitives des fonctions usuelles, sont autorisés. - si nécessaires -

Exercice n°1 *(8 points)*

1. Écrire les 3 premiers termes de la série à termes positifs, de terme générale U_n et étudier sa convergence dans les cas suivants :

   a. $U_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n^2}$ | *c.* $U_n = \dfrac{2.5.8\cdots(6n-7)(6n-4)}{3.5.9\cdots(8n-11)(8n-7)}$

   b. $U_n = \dfrac{\ln(1+n)}{\sqrt{n}(n^2+1)}$ | *d.* $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

2. Soit la fonction $2\pi-$périodique définie par : $f(x) = |x|$ pour $-\pi < x < \pi$
   (a) Tracer f dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi[$.
   (b) Développer en série de Fourier $f(x)$. En déduire que :

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

Exercice n°2 *(6 points)*

1. Former l'équation de la tangente et de la normale à la courbe de la fonction :

$$f_1(x) = \frac{(1+x^2)\text{arctg}(x) - x}{2} \quad \text{au point d'abscisse } x_0 = 1$$

2. La fonction $f_2(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ prend aux extrémités de l'intervalle $[0\ ;\ 4]$ des valeurs égales(*vérifiez !*). Peut-on appliquer le théorème de Rolle à f sur cet intervalle ?(*Justifiez votre réponse*)

Exercice n°3 *(6 points)*

On considère la fonction : $g_1(x) = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de g_1 et calculer $g_1'(x)$.
2. Montrer que g_1 et g_2 définie par $g_2(x) = \ln(1-x)$ sont équivalentes au voisinage de $x_0 = 0$.

Scanné avec CamScanner

Devoir n°1bis : Algèbre-Analyse

Durée :2 heures

Analyse : (12 points)

Exercice n°1 *(6 points)*

Soit la série de terme général :

$$U_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} \quad \forall n > 0$$

1. Simplifier l'expression de U_n et calculer $S_n = U_1 + \cdots + U_n$
2. En déduire : $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$

Exercice n°2 *(6 points)*

On considère la suite numérique :

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \quad (n \geq 1)$$

1. Montrer que la suite $(W_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
2. On pose : $V_1 = 1$ et $V_n = W_n - W_{n-1}$ $n \geq 2$
   (a) Montrer que : $|V_n| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$
   (b) En déduire que la suite $(W_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

Algèbre : (8 points)

Exercice n°1 *(3 points)*

Soit le polynôme : $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

1. Calculer en utilisant le schéma de Hörner $Q(X) = P(X+1)$.
2. En déduire le polynôme $E(X) = P(iX+1)$

Exercice n°2 *(5 points)*

Simplifier et décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante :

$$r(X) = \frac{X^4 - X^2 + 1 - (X^2 - X + 1)^2}{(X^3 - X^2 + X - 1)^3}$$

Scanné avec CamScanner

Devoir n°2 : Analyse

Durée :1 heure 30 minutes

L'usage des téléphones portables(même comme calculatrices) n'est pas autorisé. Les formulaires des fonctions trigonométriques et hyperboliques réelles ainsi que la table des primitives des fonctions usuelles, sont autorisés. - si nécessaires -

Exercice n°1 *(6 points)*

1. Calculer le DL de f au voisinage de x_0 à l'ordre n indiqué :

   1. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$; $n = 4$; $x_0 = 1$ | 2. $f(x) = e^{\cos x}$; $n = 5$; $x_0 = 0$

2. On considère la fonction : $f(x) = \sqrt{1+\ln(1+x)}$
   (a) Donner le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(x)$.
   (b) En déduire la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\ln(1+x)}-1}{x}$$

Exercice n°2 *(6 points)*

1. Calculer la primitive suivante :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}$$

2. Calculer l'intégrale définie suivante :

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}dx$$

Exercice n°2 *(8 points)*

1. Déterminer la limite suivante à l'aide d'une intégrale définie :

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{\pi}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2+\cos\frac{\pi}{n}}+\cdots+\frac{1}{2+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}}\right)$$

2. Volume de révolution autour d'un axe :
   (a) Représenter la surface S limitée par $y = x^3$, $y = 0$ et $x = 2$
   (b) Calculer le volume du corps engendré par la rotation autour de l'axe OY de la surface S.

Scanné avec CamScanner

Chapitre 2

Séries numériques

Définition 2.1.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, on appelle série numérique de terme général U_n la suite dont le terme général est :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$$

Si $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \geq 0$ on dit que la série est à termes positifs. Nous noterons $\sum U_n$ la série de terme général U_n.

2.1 Convergence et divergence

Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite S on dit que la série, $\sum U_n$ est convergente et a pour somme S et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n = S$$

sinon on dit que la série $\sum U_n$ est divergente.

Remarque 2.1. *Condition nécessaire de convergence*

Si une série est convergente son terme général U_n tend vers 0, en effet on a :

$$U_n = S_n - S_{n-1} \quad \forall n \geq 1 \quad (S_n \text{ et } S_{n-1} \text{ ont même limite})$$

Cette condition n'est pas suffisante :
Examiner la série de terme général $U_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) \quad n \in \mathbb{N}^*$.

2.2 Quelques exemples

2.2.1 Série géométrique

Posons $U_n = q^n$ la série $\sum U_n$ est la série géométrique de raison q, on a :

$$S_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad \text{si } q \neq 1$$

La série $\sum U_n$ est convergente si $|q| < 1$ et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

(Elle est divergente pour $|q| \geq 1$.).

2.2.2 série harmonique

Posons $U_n = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}$.
$\sum U_n$ est la série harmonique, elle est divergente.(voir exercice 1.3(3.))

2.2.3 Série de Riemann

On appelle série de Riemann[1] la série de terme général :

$$U_n = \frac{1}{n^\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

La série harmonique est une série de Riemann ($\alpha = 1$.)
La série de Riemann converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leq 1$. (voir exemple 2.1), ainsi par exemple la série :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

est convergente, on montre que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 2.1.

Soit la série de terme général $U_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*$

1. *Montrer que :*

$$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

2. *En déduire :* $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

N.B: 2.1.

1. *Si les séries de terme général U_n et V_n sont convergentes il en est de même des séries de terme général $U_n + V_n$ et $\alpha U_n \quad (\alpha \in \mathbb{R})$*
2. *En supprimant un nombre fini de termes d'une série on ne change pas sa nature(convergente ou divergente).*

2.3 Critère de convergence de Cauchy

Une condition nécessaire et suffisante pour que la série de terme général U_n converge est :

$$\forall q > p \quad \lim_{p\to+\infty} |U_{p+1} + \cdots + U_q| = 0$$

En effet cette condition entraine que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

1. Riemann(Bernhard) : 1826 – 1866 mathématicien français.

$S_n = U_k \dfrac{1-q^{n+1-k}}{1-q}$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Scanné avec CamScanner