

**EXERCICE N°1 : (4points)**

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E): y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 2(1 - 2x)e^x$$

$$(E'): y''(x) - 2my'(x) + 3y(x) = 0 ;$$

dans lesquels  $m$  est un paramètre réel.

1- Résoudre, suivant les valeurs de  $m$ , l'équation  $(E')$ .

2- Déterminer la valeur de  $m$  pour laquelle, la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = x^2 e^x$  est une solution de  $(E)$ .

3- Dans cette question, on donne  $m = 0$ .

a) Soit  $\varphi$  une fonction aux moins deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

a1) Montrer que si  $\varphi$  est une solution de  $(E)$  alors  $(\varphi - h)$  est une solution de  $(E')$ .

a2) Montrer que si  $(\varphi - h)$  est une solution de  $(E')$  alors  $\varphi$  est une solution de  $(E)$ .

b) Dédurre de 1-, la résolution de  $(E')$  ; puis résoudre  $(E)$ .

c) Déterminer la solution  $f$  de  $(E)$  dont la courbe représentative, dans le plan rapporté à un repère orthonormé passe par le point  $\Omega(0; -1)$  et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

4- Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = (x^2 - 2)e^x + e^{3x}$

et  $U$  une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction :  $x \mapsto 2(1 - 2x)e^x$

a) Sachant que  $g$  est une solution de  $(E)$ , montrer que la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $G(x) = \frac{1}{3}[U(x) - g'(x) + 4g(x)]$  est une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Déterminer une expression de  $U(x)$  de la forme :  $U(x) = (ax + b)e^x$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles.

c) En déduire  $G(x)$

**EXERCICE N°2 : (4points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(o, \vec{u}; \vec{v})$ , d'unité graphique 1cm. On considère les points  $A, B, C, D$  d'affixes respectives :

$$Z_A = 8; Z_B = 8i; Z_C = Z_A e^{-i\frac{\pi}{3}}; Z_D = Z_B e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

1- Ecrire  $Z_A$  et  $Z_B$  sous forme trigonométrique. Donner le module et un argument de  $Z_C$  et  $Z_D$  puis écrire ces nombres sous forme algébrique.

2- Montrer que les points  $A, B, C$  et  $D$  sont situés sur un même cercle  $(C)$  dont on précisera le centre et le rayon puis tracer le cercle  $(C)$  et placer les points  $A, B, C$  et  $D$ .

3- On note  $Z_1$  et  $Z_2$  les affixes respectives des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BD}$ .  
Montrer que  $Z_2 = Z_1 \sqrt{3}$ .

4- On note  $Z_3$  et  $Z_4$  les affixes respectives des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{DC}$ .  
Calculer  $|Z_3|$  et  $|Z_4|$ .

5- Montrer que le quadrilatère  $ABCD$  est un trapèze isocèle.

**PROBLEME : (12 points)**

A- On donne les fonctions numériques  $u$ ,  $v$  et  $k$  de variable réelle  $x$  définies par :

$$U(x) = 2 \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}, \quad V(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}, \quad K(x) = x \ln(1+x) - 1$$

1°) Etudier les variations de  $u$  et de  $v$ , et dresser leur tableau de variation.

2°) Calculer  $U(0)$  et  $V(0)$ . Etudier le signe de  $U(x)$  et  $V(x)$ .

3°) Démontrer que l'équation  $K(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}_+^*$ , une solution unique notée  $\alpha$  telle que  $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ .

B- Soit la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \in ]-\infty, 0[ \\ f(x) = x^2 \ln(1+x) & \text{si } x \in ]0, +\infty[ \end{cases}$$

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(o, i, j)$ .

1°) Déterminer l'ensemble de définition  $D$  de  $f$  et étudier les limites de  $f$  aux bornes de  $D$ .

2°) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en  $x_0=0$ .

Donner une interprétation graphique des résultats

b) Etudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variation.

c) Etudier les branches infinies de  $(C)$ .

3°) a) Pour  $x \in ]0, +\infty[$ , démontrer que la courbe  $(C)$  coupe la droite d'équation  $y=x$  en un point  $I$ .

b) Exprimer les coordonnées de  $I$  en fonction de  $\alpha$  ( $\alpha$  étant le nombre obtenu en A3°))

4°) Construire  $(C)$  (unité 2 cm)

5°) a) Démontrer que  $f$  est une bijection de  $D$  sur un intervalle que l'on précisera.

b) Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f^{-1}$  où  $f^{-1}$  désigne la bijection réciproque de  $f$ .

c) Construire  $(C')$  courbe de  $f^{-1}$ . Dans le même repère que  $(C)$ .

6°) a) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  tels que :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{x^3}{x+1} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x+1}$

b) Calculer en fonction de  $\alpha$ , l'aire  $A(\alpha)$  du domaine limité par les courbe  $(C)$ ,  $(C')$  et les droites d'équation  $x=0$  et  $x=\alpha$ .

c) Exprimer  $A(\alpha)$  sous la forme d'une fonction rationnelle en  $\alpha$ .