



ECOLE DES MINES, DE L'INDUSTRIE ET DE LA GEOLOGIE (EMIG)
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DE LICENCE
SESSION DU 08 AOUT 2024
EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE 4H / COEF 4

Exercice 1 (4 pts)

Partie A : on désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1 + \infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

- 1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. **(0,25pt)**
- 2) Démontrer que pour tout réel x de $[1 + \infty[$ $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$. **(0,5pt)**
- 3) En déduire le signe de la fonction f sur $[1 + \infty[$. **(0,25pt)**

Partie B : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) Démontrer que pour tout entier strictement positif n : $u_{n+1} - u_n = f(n)$ où f est la fonction définie dans la partie A. **(0,5pt)**
En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **(0,5pt)**
- 2) a) soit k un entier strictement positif

Justifier l'inégalité $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geq 0$, en déduire que $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{x}\right) dx \leq \frac{1}{k}$ **(0,5pt)**

Démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ (1) **(0,5pt)**

b) écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par 1, 2, 3 n et démontrer que pour entier strictement positif : $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ **(0,5pt)**

c) En déduire que pour tout entier strictement positif n , $u_n \geq 0$. **(0,25pt)**

3) Prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite. **(0,25pt)**

Exercice 2 (4 pts)

On considère le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note M_1 , M_2 et M_3 les points d'affixes respectives $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$; $z_2 = 1 - i$; $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

1. a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique. **(0,25pt+0,25pt)**
b) Déterminer le module et un argument de z_3 . **(0,25pt)**
c) Ecrire z_3 sous forme algébrique. **(0,25pt)**
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$. **(0,25pt+0,25pt)**
3. a) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n tels que z_3^n soit réel. **(0,5pt)**
b) Calculer alors z_3^{156} . **(0,25pt)**
4. On note A le point d'affixe 1, Représenter les points O, A, M_1, M_2 et M_3 dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Préciser en le justifiant la nature du triangle OAM_2 . **(0,25pt+0,25pt)**
5. On considère r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$.
 - a) Quelle est l'image par r du point A ? **(0,5pt)**
 - b) Quelle est l'image par r du point M_2 ? **(0,5pt)**
 - c) En déduire la nature du triangle OM_3M_1 . **(0,25pt)**

Problème (12 pts)

Partie A

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 3y = -\frac{3e}{(1+e^{-3x})^2}$.

On donne une fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-3x} \varphi(x)$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , exprimer $\varphi'(x) - 3\varphi(x)$ en fonction de $f'(x)$. **(0,5pt×2)**
2. Déterminer f de sorte que φ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\varphi(0) = \frac{e}{2}$. **(0,5pt×2)**

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^{1-3x}}{1+e^{-3x}}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 2 cm.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. **(0,5pt×2)**
2. Etudier les variations de f . **(0,5pt+0,25pt+0,5pt)**
3. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. **(1pt)**
4. Pour tout α réel non nul, on pose $I_\alpha = \int_0^\alpha f(x) dx$.
 - a) Donner le signe et une interprétation graphique de I_α en fonction de α . **(1pt)**
 - b) Exprimer I_α en fonction de α . **(0,5pt)**
 - c) Déterminer la limite de I_α lorsque α tend vers $+\infty$. **(0,5pt)**

Partie C

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K à préciser. **(0,5pt)**
On note f^{-1} la bijection réciproque de f et $(\mathcal{C}')$ sa courbe représentative.
2. Calculer $(f^{-1})'(\frac{e}{2})$. **(0,5pt)**
3. Dresser le tableau de variation de f^{-1} puis tracer $(\mathcal{C}')$. **(0,25pt+0,75pt)**
4. Expliciter $f^{-1}(x)$. **(0,5pt)**

Partie D

On définit sur $\mathbb{N}^*$ la suite (U_n) par : $U_n = \int_0^1 f(x) e^{\frac{x}{n}} dx$.

1.
 - a) Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le signe de U_n . **(0,25pt)**
 - b) Donner le sens de variation de la suite (U_n) . **(0,5pt)**
 - c) La suite (U_n) est-elle convergente ? **(0,25pt)**
2.
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_1 \leq U_n \leq I_1 e^{\frac{1}{n}}$ où I_1 est l'intégrale de la partie B obtenue pour $\alpha = 1$. **(0,5pt)**
 - b) En déduire la limite de la suite (U_n) . **(0,25pt)**
Donner sa valeur exacte. **(0,5pt)**